

Formelsammlung

Werkstoffe der Elektrotechnik

Stefan Erben
Roland Slowak

Version 2.10 (Build 86)
vom 27.08.2002

© 1999,2002 Stefan Erben, Roland Slowak. Alle Rechte vorbehalten.

(<http://www.erben.com/Pages/Studium/WETFormel.html>)

Diese Formelsammlung entspringt vielen Quellen. Ich möchte hier nur die wichtigsten nennen — auch um Dank auszusprechen.

Begonnen hat es mit einer Formelsammlung eines unbekanntes Studenten. Diese wurde von Roland Slowak stark erweitert, dann später durch Christian Kölker nochmals erweitert und zu einem Dokument zusammengefaßt. Diese Kompilation war aber leider zu einem (zumindest von mir) uneditierbaren Gesamtdokument unter MS-Word verkommen, so daß jede Änderung der Handschrift bzw. fototechnischer Verfahren bedurft hätte. Für eine Formelsammlung ist es jedoch wichtig, daß man sie nach Bedarf anpassen kann. Daher danke ich allen, insbesondere den Autoren der größten Formelsammlung (Unbekannt, Roland und Christian), die mir so den Anstoß gegeben haben, diese Formelsammlung aus der Taufe zu heben. Weitere Formeln, Darstellungen und Ideen entstanden aus dem Scriptum von Prof. Arlt, den Unterlagen von Prof. Waser und diversen Aufgaben.

Weitere Korrekturen wurden mir durch Jan Plasberg, André Baumgarten, Michael van der Giet, Bernd Tersteegen, Holger Weber und — last, but not least — Georg Baum zuteil. Besonders Georg Baum möchte ich für die enorme Masse an berichtigten Fehlern danken.

1. Bei Fragen, die den Vorlesungsstoff, die Klausuraufgaben oder deren Stellung betreffen, wenden Sie sich bitte an Prof. Dr.-Ing. R. Waser bzw. seine Assistenten im Walter-Schottky-Haus, Sommerfeldstrae 24, 52074 Aachen–Melaten. Bei Fehlern bzw. Unklarheiten bitte ich um eine e-mail an mich (stefan@erben.com).
2. Logischerweise wird für die hier folgenden Seiten keine Gewähr übernommen, außer, daß sie Platz im Source auf der Festplatte verschlingen können und in gedruckter Form auch berührbar sind. Oder erwartet hier jemand tatsächlich eine Gewähr für die Richtigkeit?
3. Diese Publikation ist unabhängig von der vorliegenden Form — als Druckwerk oder Datei — urheberrechtlich geschützt, da es sich um eine von uns erstellte Zusammenstellung handelt.

Der Zweck dieses Werkes ist es, Studenten durch die Formelsammlung zu einem besseren Klausurergebnis zu bringen. Jede diesem Zweck dienende und insbesondere *nicht-kommerzielle* Verwendung dieser Publikation einschließlich der Weitergabe in gedruckter Form ist erlaubt, wenn

- a) die vollständige Information über den urheberrechtlichen Schutz und
- b) die Namen der Autoren und
- c) die Quellenangabe im Internet

bei der Form der Verwendung erhalten bleiben. Die Weitergabe darf auch durch Kopie der Dateien stattfinden, nicht jedoch durch Bereitstellung auf einem Datennetz, insbesondere dem Internet.

Explizit nicht gestattet ist

- a) das Entfernen von Informationen über den urheberrechtlichen Schutz oder
- b) das Entfernen von Autorennamen oder
- c) der Verkauf von gedruckten Exemplaren außer gegen die reinen Vervielfältigungskosten.

Jede nicht hierdurch autorisierte Verwendung bedarf unserer schriftlichen Zustimmung.

4. *Bit* ist ein eingetragenes Warenzeichen der Brauerei Th. Simon GmbH.
5. Viel Spaß!

Inhaltsverzeichnis

1	Konstanten und Rechenregeln	4
1.1	Zahlen	4
1.2	Einheiten und Größenordnungen	4
1.3	Trigonometrie	4
2	Werkstoffeigenschaften und Maße	5
2.1	Dichten	5
2.2	Ideale Gase	5
2.3	Temperaturkoeffizienten	5
2.4	Diverse Proportionalitätsbeziehungen (Zusammenfassung)	6
3	Verschiedene Gleichungen	6
3.1	Umfänge, Flächen und Volumina	6
3.2	Differentialgleichungen	6
3.3	Geschwindigkeiten	7
3.4	Energiearten	7
3.5	Kraftgleichungen	7
4	Chemische Bindungen	8
5	Kristalle	8
6	Diffusion	8
7	Elektrischer Leiter	10
7.1	Messbrücken	10
7.1.1	Wheatstone	10
7.2	Schwingkreise	10
8	Halbleiter	12
8.1	Eigenleitung	12
8.2	Übergang Eigenleitung → Störstellenerschöpfung	13
8.3	Störstellenerschöpfung und Störstellenleitung	14
8.4	Störstellenreserve	14
8.5	Leitwert	15
8.6	Widerstand	16
8.7	Halleffekt	16
8.8	Beweglichkeit	17
8.9	Trägerdichten und Fermienergie im thermodynamischen Gleichgewicht	18
8.10	Verteilungsfunktion der Ladungsträger	18
8.11	Effektive Besetzung	18
8.12	Störstellenniveaus	19
8.13	Fermienergie	19
8.14	Diffusionsspannung	19
8.15	Rekombinationszeit	20
8.16	Dioden	20
8.17	Dielektrische Formeln	20

9	Magnetismus	21
9.1	Gleichungen	21
9.2	Scherung	22
9.3	gespeister Magnetkreis mit Meßspule	22
9.4	Ringkern mit Luftspalt	23
9.5	Magnetkreis mit zwei Luftspalten	23
9.6	Geradensteigung von Hysteresekurven	24
9.7	Permeabilität	24
9.8	Verluste	24
9.8.1	Diamagnetismus	25
9.8.2	Paramagnetismus	25
9.8.3	Ferromagnetismus	25
9.8.4	Ferrimagnetismus	26
9.8.5	Antiferromagnetismus	26
9.9	Fakten über Magnete	26
10	Magnetische Anisotropie	28
10.1	Formanisotropie	28
10.2	Kristallanisotropie	28
10.2.1	Einachsige (uniaxiale) eindomänige Kristallanisotropie	29
10.2.2	Einachsige (uniaxiale) polydomänige Kristallanisotropie	30
10.2.3	Polydomänige Kristall- und Formanisotropie	30
10.2.4	Kubische Kristallanisotropie	31
10.3	Quasi-Anisotropie	32
10.4	Spannungsanisotropie	32
10.4.1	thermische Spannungsanisotropie	32
10.4.2	mechanische Spannungsanisotropie	33
10.4.3	Die Blochwand	33
11	Dielektrika	35
11.1	Allgemein	35
11.2	ESB der Debye-Relaxation	36
11.3	Cole–Cole–Diagramm	36
11.3.1	Konstruktion aus ε_∞ und $\Delta\varepsilon_r$	36
11.3.2	Konstruktion aus ε_∞ und δ_{max}	36
11.3.3	Konstruktion aus $\Delta\varepsilon_r$ und δ_{max}	37
11.3.4	Konstruktion aus δ_{max} und ε' oder ε'' bei $f = \text{const}$	37
11.4	Kondensatoren	37
11.4.1	Zwei Dielektrika parallel	38
11.4.2	Zwei Dielektrika in Reihe mit Maxwell-Wagner-Relaxation	38
11.4.3	Zwei Dielektrika in Reihe	38
11.5	Polarisation	39
11.5.1	Elektronenpolarisation	40
11.5.2	Ionenpolarisation	40
11.5.3	Orientierungspolarisation	40
11.5.4	Relaxation	41
11.6	Piezoelektrizität	41

1 Konstanten und Rechenregeln

1.1 Zahlen

Lichtgeschwindigkeit	$c_0 = 2,9979 \cdot 10^8 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$
Permeabilität	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,257 \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \right]$
Dielektrizität	$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \left[\frac{\text{As}}{\text{Vm}} \right]$
Elektronenladung	$e^- = q_e = -1,6019 \cdot 10^{-19} \text{ [As]}$
Elektronenmasse	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \left[\text{kg} = \frac{\text{Ws}^3}{\text{m}^2} \right]$
Protonenmasse	$m_p = 1,67218 \cdot 10^{-27} \left[\text{kg} = \frac{\text{Ws}^3}{\text{m}^2} \right]$
Planksches Wirkungsquant	$h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ [Ws}^2] = 4,136 \cdot 10^{-15} \text{ [eVs]}$
Boltzmannkonstante	$k = 1,3803 \cdot 10^{-23} \left[\frac{\text{Ws}}{\text{grad}} \right] = 8,62 \cdot 10^{-5} \left[\frac{\text{eV}}{\text{K}} \right]$
Avogadrozahl (Loschmitzahl)	$N_A = L = 6,0236 \cdot 10^{23} \left[\frac{1}{\text{mol}} \right]$
Erdbeschleunigung	$g = 9,80665 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$

1.2 Einheiten und Größenordnungen

Kraft F	$\left[\text{Newton N} = \frac{\text{mkg}}{\text{s}^2} = \frac{\text{VAs}}{\text{m}} \right]$	Leitwert Y	$\left[\text{Siemens S} = \frac{\text{s}^3 \text{A}^2}{\text{m}^2 \text{kg}} = \frac{\text{A}}{\text{V}} \right]$
Energie E	$\left[\text{Joule J} = \frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{s}^2} = \text{VAs} \right]$	Kapazität C	$\left[\text{Farad F} = \frac{\text{s}^4 \text{A}^2}{\text{m}^2 \text{kg}} = \frac{\text{C}}{\text{V}} \right]$
Leistung P	$\left[\text{Watt W} = \frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{s}^3} = \text{VA} \right]$	Induktivität L	$\left[\text{Henry H} = \frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{s}^2 \text{A}^2} = \frac{\text{Vs}}{\text{A}} \right]$
Ladung Q	$[\text{Coulomb C} = \text{As}]$	magn. Fluß Φ	$\left[\text{Weber Wb} = \frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{s}^2 \text{A}} = \text{Vs} \right]$
Spannung V	$\left[\text{Volt V} = \frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{s}^3 \text{A}} = \frac{\text{W}}{\text{A}} \right]$	Induktion B	$\left[\text{Tesla T} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2 \text{A}} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \right]$
Widerstand R	$\left[\text{Ohm } \Omega = \frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{s}^3 \text{A}^2} = \frac{\text{V}}{\text{A}} \right]$	Magnetfeld H	$\left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$

Vorsilben < 1:

Dezi d	10^{-1}	Nano n	10^{-9}
Zenti c	10^{-2}	Piko p	10^{-12}
Milli m	10^{-3}	Femto f	10^{-15}
Mikro μ	10^{-6}	Atto a	10^{-18}

Vorsilben > 1:

Deka da	10^1	Giga G	10^9
Hekto h	10^2	Tera T	10^{12}
Kilo k	10^3	Peta P	10^{15}
Mega M	10^6	Exa E	10^{18}

1.3 Trigonometrie

<p style="text-align: center;">Sinus:</p> $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ $\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$ $\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$	<p style="text-align: center;">Cosinus:</p> $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ $\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$ $\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$
<p style="text-align: center;">Gemischtes:</p> $\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y))$ $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$	<p style="text-align: center;">sin \rightleftharpoons cos :</p> $\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$ $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$ $\sin(90^\circ - \varphi) = \cos \varphi$ $\cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi$ $\sin(90^\circ + \varphi) = \cos \varphi$ $\cos(90^\circ + \varphi) = -\sin \varphi$ $\sin(180^\circ + \varphi) = -\sin \varphi$ $\cos(180^\circ + \varphi) = -\cos \varphi$ $\sin(90^\circ - 2\varphi) = 1 - 2 \sin^2 \varphi$

Wertebereich: $x, y \in [0; 2\pi]$; $\varphi \in [0; 90^\circ]$

2 Werkstoffeigenschaften und Maße

2.1 Dichten

Anzahl der Atome	N
Trägerdichte	$n = \delta \frac{N}{V} = \delta \frac{N_A \rho}{M}$
Molmasse	$M = \frac{\text{Masse}}{\text{mol}} \left(C_{12} \frac{g}{\text{mol}} \right)$
	$\delta = \frac{\text{freie Elektronen}}{\text{Atom}}$

2.2 Ideale Gase

Teilchenzahl	$n = \frac{\text{Zahl der Teilchen pro mol}}{\text{molares Normvolumen}} = \frac{N_A}{\text{mol}} \cdot \frac{1000 \text{ mol}}{22,41383 \text{ m}^3}$
Gasgesetze	$pV = mRT$ $\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} = \text{const}$
spezielle Gaskonstante	$R \sim \rho \left[\frac{W_s}{K} \right]$
Boltzmannkonstante	$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \left[\frac{W_s}{K} \right]$

2.3 Temperaturkoeffizienten

Maß für die Änderung einer Größe bei Temperaturänderung.

X, Y	Temperaturabhängige Größen
a, b	Nicht temperaturabhängige Größen
TK Allgemein	$TK_X = \frac{1}{X} \frac{dX}{dT} = \frac{d \ln(X)}{dT} = \frac{1}{X} \frac{\Delta X}{\Delta T}$

TK bei Wert X_1 und Temperatur T_1 $TK_{X/T_1} = \frac{1}{X_1} \frac{dX}{dT}$

Zunahme: $X_1 > X_2$ bei $T_1 > T_2$ $TK_X > 0$

Abnahme: $X_1 < X_2$ bei $T_1 > T_2$ $TK_X < 0$

Rechenregel für Produkte $TK_{X^a \cdot Y^b} = aTK_X + bTK_Y$

Rechenregel für Summen $TK_{X+Y} = \frac{1}{X+Y} \frac{d(X+Y)}{dT} = \frac{X}{X+Y} TK_X + \frac{Y}{X+Y} TK_Y$

Rechenregel für Wurzeln $TK_{\sqrt{X}} = TK_{X^{1/2}} = \frac{1}{2} TK_X$

Beispiel elektrischer Widerstand: $R = \rho \frac{\ell}{A}$

$$TK_R = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT} = \frac{d \ln(R)}{dT} = \frac{1}{R_0} \frac{\Delta R}{\Delta T}$$

$$TK_R = TK_\rho + TK_\ell - TK_A$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta \ell}{\ell} - \frac{\Delta A}{A}$$

2.4 Diverse Proportionalitätsbeziehungen (Zusammenfassung)

Induktivität	$L \sim \mu \sim \chi_m \sim \frac{1}{T}$
Kapazität	$C \sim \varepsilon_r \sim \chi_{or} \sim \frac{1}{T} \sim \frac{P}{3kT}$
spezielle Gaskonstante	$R \sim \rho$
Beweglichkeit im Metall	$\mu \sim \tau \sim \frac{1}{T}$
Beweglichkeit im Halbleiter (tiefe Temperatur)	$\mu \sim \tau \sim T^{\frac{3}{2}}$
Beweglichkeit im Halbleiter (hohe Temperatur)	$\mu \sim \tau \sim T^{-\frac{3}{2}}$

3 Verschiedene Gleichungen

3.1 Umfänge, Flächen und Volumina

	Umfänge	Flächen	Volumina
Rechteck	$2(a+b)$	Quadrat a^2	Würfel a^3
Kreis	$2\pi r$	Rechteck ab	Quader abc
Ellipse	$\approx \pi \left[\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab} \right]$	Zylindermantel $2\pi r h$	Zylinder $\pi r^2 h$
		Kreis πr^2	Kugel $\frac{4}{3}\pi r^3$
		Ellipse πab	Ellipsoid $\frac{4}{3}\pi abc$
		Kugeloberfläche $4\pi r^2$	

3.2 Differentialgleichungen

Diffusion, Skineffekt und Wärmeleitung	$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial n}{\partial t} = \Delta n$	$[D] = \frac{cm^2}{s}$
Relaxation	$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\tau} [x_0 - x(t)]$	
Zustandsdichte	$Z = \int Z(W) dW$	
effektive Besetzung	$N = \int Z(W) f(W) dW$	

$$\text{Schrödinger-Gleichung des 1-dim. Potentialtopfes} \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} W \quad (5.52)$$

3.3 Geschwindigkeiten

$$\text{Driftgeschwindigkeit} \quad v_D = \frac{\ell}{t} = \frac{|e|\tau}{m_e} E = \frac{I}{n|e|A}$$

$$\text{thermische Geschwindigkeit} \quad v_{th} = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}}$$

$$\text{Fermigeschwindigkeit} \quad v_F = \sqrt{\frac{2W_F}{m_e}} = \sqrt{\frac{2kT_F}{m_e}}$$

$$\text{Wellengeschwindigkeit} \quad v = \sqrt{\frac{sE}{\rho}}$$

$$\text{Verhältnisse} \quad v_F > v_{th} > v_D$$

3.4 Energiearten

$$\text{Energie im Luftspalt} \quad W = \frac{1}{2} V H_\ell B_\ell = \frac{1}{2} V \frac{B_\ell^2}{\mu_0}$$

$$\text{magnetische Dipolenergie} \quad W = -\vec{p}_m \vec{H}_a = -V \vec{H}_a \vec{J}$$

$$W_{\text{induziert}} = -\frac{1}{2} \vec{p}_m \vec{H}_a = -\frac{1}{2} V \vec{H}_a \vec{J}$$

$$\text{dielektrische Energie} \quad W = -\vec{p} \vec{E} \cos \varphi$$

$$W_{\text{induziert}} = -\frac{1}{2} \vec{p} \vec{E}$$

$$\text{elektrische Feldenergie} \quad W = \frac{CU^2}{2}$$

$$\text{magnetische Feldenergie} \quad W = \frac{LI^2}{2}$$

$$\text{Energie im Dielektrikum} \quad W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 V$$

$$\text{Energie im Magnetikum} \quad W = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r H^2 V$$

3.5 Kraftgleichungen

$$\text{Coulombkraft} \quad F_C = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\text{Lorenzkraft} \quad F_L = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\text{Kraft im mag. Luftspalt} \quad F = -\frac{1}{2} \Phi H_0 = -\frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu_0} A$$

$$\text{Kraft im Plattenkondensator} \quad F = -\frac{1}{2} QE = -\frac{1}{2} \frac{D_0^2}{\mu_0} A$$

$$\text{elektrostatische Dipolkraft} \quad F_{el} = EQ = \frac{qx}{a}$$

$$\text{magnetische Dipolkraft} \quad F_{mag} = H\Phi$$

$$\text{Zentrifugalkraft} \quad F_Z = \frac{mv^2}{r}$$

$$F = -\text{grad} W_{tot} = -\frac{dW_{tot}}{d\ell}$$

4 Chemische Bindungen

Alle Bindungen	<ul style="list-style-type: none"> • alle chemischen Bindungsarten sind elektrostatischer Natur
Kovalente Bindung	<ul style="list-style-type: none"> • geringste Packungsdichte • ausgeprägte Bindungsrichtung • 8er-Schale auffüllen näherungsweise Edelgaskonfiguration • teilen von Elektronen mit Nachbaratomen hantelförmige Bindung der Elektronen mit den Atomen • Energie wird frei wenn Orbitale sich überlappen • auch Atombindung genannt • Bindungsenergie 4–12 eV
Ionen Bindung	<ul style="list-style-type: none"> • größte Packungsdichte • keine ausgeprägte Bindungsrichtung • kristallisiert in dichter Kugelpackung • Atom gibt Elektronen ab oder nimmt Elektronen auf • Bindungsenergie 5–10 eV
Metallische Bindung	<ul style="list-style-type: none"> • große Packungsdichte • Bindungsenergie 1–3 eV
Van der Vaal'sche Bindung	<ul style="list-style-type: none"> • induzierte Dipol-Dipol Wechselwirkung bei Fluktuation von Elektronen → Polarisation von anderen Atomen • Edelgaskristalle • Bindungsenergie 0,1 eV
Wasserstoffbrückenbindung	<ul style="list-style-type: none"> • geht mit Nachbarn teils Kovalente teils Ionenbindung ein • Bindungsenergie 0,1 eV

5 Kristalle

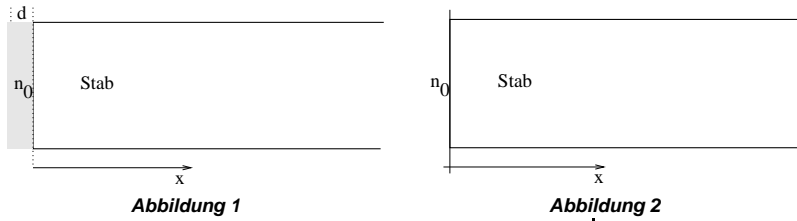
Begriff	Erklärung
Ionisierungsenergie	Energie, die gebraucht wird, um ein Elektron aus dem Atomverband zu lösen
Ion	geladenes Atom
Isotrop	Nicht richtungsabhängig
Anisotrop	Gegenteil von <i>isotrop</i> , d.h. richtungsabhängig.
Koordinationszahl	Anzahl der nächsten Nachbaratome im gleichen Abstand d
Packungsdichte	Prozentuale Füllung im Kugelmodell
Phasenwandlung	Änderung der Gitterstruktur (z.B. kfz→krz)

Kristallfehler	Beispiel
Punktfehler (0-dimensional)	Schottkydefekt Frenkelpaar bildet sich durch Diffusion
Versetzung (1-dimensional)	Stufenversetzung Schraubenversetzung
2-dimensionale Fehler	flächenhafte Fehler/Polykristalin
3-dimensionale Fehler	räumliche Defekte, Mehrphasige Werkstoffe

6 Diffusion

Partikelstromdichte	$\vec{j} = -D(T) \text{grad } n$ (1.Fick'sches Gesetz)
Kontinuitätsgleichung	$\frac{\partial n}{\partial t} = -\text{div } \vec{j}$ (2.Fick'sches Gesetz)
Diffusionskoeffizient in festen Stoffen	$D(T) = D_0 e^{-\frac{W_D}{kT}}$ (Arrhenius-Gleichung)
Mindestenergie (Anregungsenergie)	W_D [eV]
Diffusionskonstante	D_0 $\left[\frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \right]$
z.B. Al in Si	$D_0 = 8 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$

Teilchendichte	$n \left[\frac{1}{\text{cm}^3} \right]$
Steilheit des Diffusionsprofils	$\frac{\partial n}{\partial x}$
Oberflächenbelegung (Ergiebigkeit)	$Q = n_0 d \left[\frac{1}{\text{cm}^2} \right], \quad (d \ll 1)$



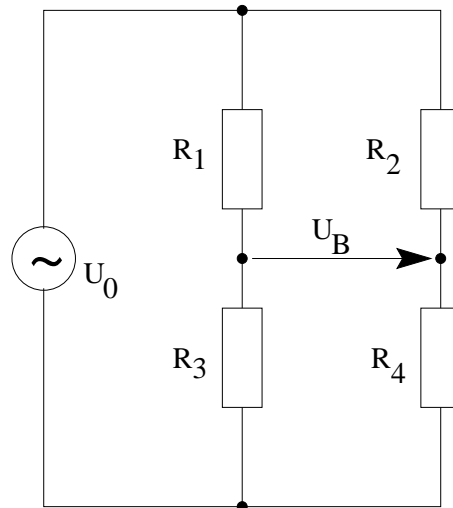
	wie in Abb. 1	wie in Abb. 2
Material	Dicke d , Dichte n_0	unerschöpflich
Voraussetzung	Voraussetzung: $d \ll x_0$	
Lösung der DGL	$n(x, t) \approx \frac{n_0 d}{\sqrt{\pi D(T) t}} e^{-\frac{x^2}{4D(T)t}}$	$n(x, t) = n_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{D(T)t}}} e^{-u^2} du \right)$
Eindringtiefe	$x_0 = 2\sqrt{D(T)t}$	$x_0 = 1,28\sqrt{D(T)t}$

7 Elektrischer Leiter

Widerstand	$R = \rho \frac{\ell}{A} = \frac{\ell}{\sigma A}$
Strom	$I = S A = v_D n e A = \frac{\ell}{t} \gamma n e A$
Leitfähigkeit	$\sigma = n e \mu = \frac{n e^2 \tau}{m_e}$
Stromdichte	$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \frac{n e^2 \tau}{m_e} \vec{E}$
Beweglichkeit im Leiter	$\mu_n = \frac{v_D}{E} = \frac{ e }{m_e} \tau$
im Metall	$\mu \sim \tau \sim \frac{1}{T}$
im Halbleiter	$\mu \sim \tau \sim T^{\frac{3}{2}}$
freie Weglänge	$\ell_f = \tau v_{th} = \frac{\mu_n m_e}{e} \sqrt{\frac{3kT}{m_e}}$
Relaxationszeit	$\tau = \frac{m \sigma}{n e^2}$
Laufzeitdefekte oberhalb	$f = \frac{1}{2\pi\tau}$

7.1 Messbrücken

7.1.1 Wheatstone



Die Wheatstonesche Messbrücke dient der Bestimmung von ohmschen Widerständen. Ist die Brücke abgeglichen, so gilt $U_B = I_B = 0$. Im anderen Fall kann ein Strom I_B über den Innenwiderstand R_i eines Messgerätes fließen.

Abgleichbedingung $\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}$ bzw. $R_1 R_4 = R_2 R_3$

Abgleicherfolg $U_B = 0$ bzw. $I_B = 0$

Brückenstrom
$$I_B = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) \left(\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} + R_i \right)} U_0$$

7.2 Schwingkreise

Resonanzfrequenz (verlustlos) $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Reihe (mit Verlusten)

Kompensationsfrequenz $\omega_k = \omega_0$

Parallel (mit Verlusten)

Blindverhältnis $Z_0 = \frac{L}{C}$

Resonanz nur für $R_L^2 \neq Z_0^2, R_C^2 \neq Z_0^2$

Kompensationsfrequenz $\omega_k = \omega_0 \sqrt{\frac{R_L^2 - Z_0^2}{R_C^2 - Z_0^2}}$

8 Halbleiter

Vorneweg die Erklärung der hier verwendeten Variablen:

Bereich I	Eigenleitung, $T \rightarrow \infty$
Bereich II	Störstellenschöpfung
Bereich III	Störstellenreserve, $T \rightarrow 0$
Elektronenladung	$q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$
Majoritätsträgerdichten: Elektronen, Löcher	n, p
Minoritätsträgerdichten: Löcher, Elektronen	p_n, n_p
Zustands- oder Trägerdichten: Leitungsband, Valenzband	N_L, N_V
effektive Zustandsdichten: mittlere, Donator, Akzeptor	N_{eff}, N_D, N_A
Dichten der aktivierten (=ionisierten) Störstellen	N_D^+, N_A^+
Hallspannung, Hallkonstante	U_H, R_H
Beweglichkeiten von Elektronen, Löchern	μ_n, μ_p
Energie der Leitungs-, Valenzbandkante	W_L, W_V
Bandabstand	$W_B = W_L - W_V$
Dotierstoff- bzw. Störstellenenergie	W_D, W_A
Aktivierungsenergie	$\Delta W_D = W_L - W_D, \Delta W_A = W_A - W_V$
Temperaturen	T
Übergang Bereich I \rightarrow II	T_R
Leitfähigkeit	σ
effektive Masse von Elektronen, Löchern	m_n^*, m_p^*

In jedem Halbleiter ist infolge thermischer Lochpaargeneration intrinsische Leitung (Eigenleitung) möglich. Bei dotierten Halbleitern gibt es zusätzlich auch noch die Störstellenleitung, die durch eingebrachte Fremdstoffe mit gitterstörenden Valenzzahlen verursacht wird. Diese beeinflusst die Leitfähigkeit zumeist viel stärker als die intrinsische Leitung.

8.1 Eigenleitung

Bereich I: hohe Temperatur, thermische Elektronen-Lochpaar-Generation. Jeder Halbleiter, ungeachtet seiner Dotierung hat einen Eigenleitungsbereich bei hohen Temperaturen. Die Art und Stärke der Dotierung ist im Eigenleitungsbereich ohne weitere Auswirkung für die Rechnung, da die Anzahl der thermisch erzeugten Elektron-Loch-Paare sehr grösser als die durch Störstellen verursachte Leitfähigkeit ist. *Alle Formeln gelten auch jedoch für die reine intrinsische Leitung von Störstellenhalbleitern im gesamten Temperaturbereich.*

Bedingungen	$N_D \ll 2n_i$
Eigenleitungsträgerdichte	$n = p = n_i = N_{eff} e^{-\frac{W_B}{2kT}}$
Massenwirkungsgesetz	$np = n_i^2 = N_{eff}^2 e^{-\frac{W_B}{kT}}$
mittlere eff. Zustandsdichte	$N_{eff} = \sqrt{N_L N_V}$
	$N_L \sim T^{\frac{3}{2}}, N_V \sim T^{\frac{3}{2}}$ (Tab. 7.3 unten)
bei Temperaturabhängigkeit	$n_i(T) = n_i(T_1) \left(\frac{T}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{W_B}{2k} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1}\right)}$

	$N_{eff}(T) = N_{eff}(T_1) \left(\frac{T}{T_1} \right)^{\frac{3}{2}}$
Eigenleitfähigkeit	$\sigma_i = e n_i (\mu_n + \mu_p)$ $\sigma_i \sim e^{-\frac{W_B}{2kT}} T^{\frac{3}{2}} T^{-\beta}$ $\mu \sim T^{-\beta}$
Temperaturkoeffizient	$TK_\sigma = \frac{W_B}{2kT^2} + \frac{3}{2T} - \frac{\beta}{T}$
Hallkonstante	$R_{Hi} = \frac{1}{n_i q} \frac{\mu_p - \mu_n}{\mu_p + \mu_n} < 0 \quad \text{für } \mu_n > \mu_p$
Bandenergie	$W_B = \frac{2k}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} \left[\ln \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \underbrace{\frac{3}{2} \ln \frac{T_2}{T_1}}_{\text{wegen } N_L \sim T^{\frac{3}{2}}} \right]$ $W_B = \frac{2k}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} \ln \frac{U_2}{U_1} \quad \text{mit } I = \text{const} = \frac{U}{R} = \frac{U}{\frac{\ell}{\sigma A}}$ $W_B = \frac{2k}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} \left[\ln \frac{ R_H(T_2) }{ R_H(T_1) } + \underbrace{\frac{3}{2} \ln \frac{T_2}{T_1}}_{\text{wegen } N_V \sim T^{\frac{3}{2}}} \right]$ <p>oder über den Temperaturkoeffizienten TK_U</p>

Beweglichkeit	$\mu_n > \mu_p$	$\mu_n < \mu_p$ (selten)
	$\mu_n = \frac{\sigma_i}{2} \left(\frac{1}{n_i q} + R_{Hi} \right)$	$\mu_n = \frac{\sigma_i}{2} \left(\frac{1}{n_i q} - R_{Hi} \right)$
	$\mu_p = \frac{\sigma_i}{2} \left(\frac{1}{n_i q} - R_{Hi} \right)$	$\mu_p = \frac{\sigma_i}{2} \left(\frac{1}{n_i q} + R_{Hi} \right)$

8.2 Übergang Eigenleitung → Störstellenerschöpfung

Bereich I→II: Temperaturbereich ist 300–400K. Bei dotierten Halbleitern findet ein Übergang zwischen dem Bereich der Eigenleitung und der Störstellenerschöpfung statt. Die thermische Anregung erreicht hier die durch die Dotierung bedingte. Die Majoritätsträgerdichte wird hierbei temperaturunabhängig.

	n – Halbleiter	p – Halbleiter
Bedingung	$N_A = 0$	$N_D = 0$
Massenwirkungsgesetz	$np = n_i^2$	$np = n_i^2$
Neutralitätsbedingung	$p + N_D^+ = n, \quad N_D^+ = N_D$	$n + N_A^- = p, \quad N_A^- = N_A$
bei min. Leitfähigkeit	$\left(\frac{d\sigma}{dn} = 0 \right)$	$\left(\frac{d\sigma}{dp} = 0 \right)$
	$N_D = n_i \left(\sqrt{\frac{\mu_p}{\mu_n}} - \sqrt{\frac{\mu_n}{\mu_p}} \right)$	$N_A = n_i \left(\sqrt{\frac{\mu_n}{\mu_p}} - \sqrt{\frac{\mu_p}{\mu_n}} \right)$
bei $R_H = 0$ (p-HL)	$N_D = n_i \left(\frac{\mu_p}{\mu_n} - \frac{\mu_n}{\mu_p} \right)$	$N_A = n_i \left(\frac{\mu_n}{\mu_p} - \frac{\mu_p}{\mu_n} \right)$
Majoritätsträgerdichte	$n = \frac{N_D}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4n_i^2}{N_D^2}} \right)$	$p = \frac{N_A}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4n_i^2}{N_A^2}} \right)$
bei min. Leitfähigkeit	$n = n_i \sqrt{\frac{\mu_p}{\mu_n}}$	$p = n_i \sqrt{\frac{\mu_n}{\mu_p}}$

	n – Halbleiter	p – Halbleiter
bei $R_H = 0$ (p-HL)	$n = n_i \frac{\mu_p}{\mu_n}$	$p = n_i \frac{\mu_n}{\mu_p}$
Minoritätsträgerdichte	$p_n = -\frac{N_D}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4n_i^2}{N_D^2}} \right)$	$n_p = -\frac{N_A}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4n_i^2}{N_A^2}} \right)$
Eigenleitfähigkeit	$\sigma = q(n\mu_n + p\mu_p) = qn_i(\mu_n + \mu_p)$	$\sigma = q(n\mu_n + p\mu_p) = qn_i(\mu_n + \mu_p)$
Fermienergie	$W_F = \frac{W_V + W_L}{2} + \frac{3}{4}kT \ln \left(\frac{m_p^*}{m_n^*} \right) + kT \operatorname{arsinh} \frac{N_D}{2n_i}$	$W_F = \frac{W_V + W_L}{2} + \frac{3}{4}kT \ln \left(\frac{m_p^*}{m_n^*} \right) - kT \operatorname{arsinh} \frac{N_A}{2n_i}$
Hallkoeffizient	$R_H = \frac{1}{q} \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{(p\mu_p + n\mu_n)^2}$ $R_H = \frac{1}{q} \frac{p - nb^2}{(p + nb)^2}$ mit $b = \frac{\mu_n}{\mu_p}$	$R_H = \frac{1}{q} \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{(p\mu_p + n\mu_n)^2}$ $R_H = \frac{1}{q} \frac{p - nb^2}{(p + nb)^2}$ mit $b = \frac{\mu_n}{\mu_p}$ $R_H = 0$ bei $T = T_R = \frac{W_B}{k \ln \frac{N_L N_V}{n_i^2}}$ bei $\mu_n^2 n = \mu_p^2 p$ bei $\sigma(T_r) = \sigma(T_i)$

8.3 Störstellenschöpfung und Störstellenleitung

Bereich II: Temperaturbereich ist 200–250K. Alle eingebauten Fremdatome sind ionisiert. Die Majoritätsträgerdichte ist temperaturunabhängig.

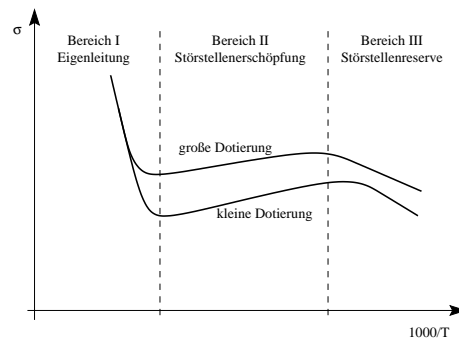
	n – Halbleiter	p – Halbleiter
Bedingung	$N_D \gg 2n_i$ $W_D - W_F < 3kT$ $N_A = 0$ $N_D = n$	$N_A \gg 2n_i$ $W_F - W_A < 3kT$ $N_D = 0$ $N_A = p$
Massenwirkungsgesetz	$np = n_i^2$	$np = n_i^2$
Majoritätsträgerdichte	$n = N_D = -\frac{1}{qR_H} \neq f(T)$	$p = N_A = \frac{1}{qR_H} \neq f(T)$
Minoritätsträgerdichte	$p_n(T) = \frac{n_i^2(T)}{N_D}$	$n_p(T) = \frac{n_i^2(T)}{N_A}$
Leitfähigkeit	$\sigma_n = qN_D\mu_n, \quad \sigma \sim T^{-\beta_n}$	$\sigma_p = qN_A\mu_p, \quad \sigma \sim T^{-\beta_p}$
Hallkoeffizient	$R_H = -\frac{1}{qn} = \text{const}$	$R_H = \frac{1}{qp} = \text{const}$
Beweglichkeit	$\mu_n = -R_H\sigma_n$	$\mu_p = R_H\sigma_p$
effektive Zustandsdichte	$N_D = N_L e^{-\frac{W_L - W_F}{kT}}$	$N_A = N_V e^{-\frac{W_F - W_V}{kT}}$

8.4 Störstellenreserve

Bereich III: tiefe Temperaturen, es gibt ionisierte und neutrale Störstellen.

	n – Halbleiter	p – Halbleiter
Bedingung	$W_D - W_F > 2kT$	$W_F - W_A > 3kT$
	$N_A = 0$	$N_D = 0$
Majoritätsträgerdichte	$n(T) = \sqrt{\frac{N_D N_L}{2}} e^{-\frac{\Delta W_D}{2kT}}$	$p(T) = \sqrt{\frac{N_A N_V}{2}} e^{-\frac{\Delta W_A}{2kT}}$
ionisierte Störstellen	$N_D^+ = \frac{N_D}{1 + 2e^{-\frac{W_D - W_F}{kT}}}$ $N_L \sim T^{\frac{3}{2}}$	$N_A^- = \frac{N_A}{1 + 2e^{-\frac{W_F - W_A}{kT}}}$ $N_V \sim T^{\frac{3}{2}}$
Minoritätsträgerdichte	p vernachlässigbar	n vernachlässigbar
effektive ZD	$N_D = N_L e^{-\frac{W_L - W_F}{kT}}$ $N_D = N_D^+ + N_D^0$	$N_A = N_V e^{-\frac{W_F - W_V}{kT}}$ $N_A = N_A^- + N_A^0$
Leitungs-ZD	$N_L(T) = N_L(T_1) \left(\frac{T}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}}$	$N_V(T) = N_V(T_1) \left(\frac{T}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}}$
Leitfähigkeit	$\sigma_n = qn\mu_n, \quad \sigma_n \sim e^{-\frac{\Delta W_D}{2kT}}$	$\sigma_p = qp\mu_p, \quad \sigma_p \sim e^{-\frac{\Delta W_A}{2kT}}$
Hallkoeffizient	$R_H = -\frac{1}{qn} = \frac{\mu_n}{\sigma_n}$	$R_H = \frac{1}{qp} = \frac{\mu_p}{\sigma_p}$
Fermienergie	$W_F = \frac{W_L + W_D}{2}$ für $T = 0$ $W_F = W_D - kT \ln\left(\frac{1}{2} \left\{ \frac{N_D}{n(T)} - 1 \right\}\right)$	$W_F = \frac{W_A + W_V}{2}$ für $T = 0$ $W_F = W_A - kT \ln\left(\frac{1}{2} \left\{ \frac{N_A}{n(T)} - 1 \right\}\right)$
Aktivierungsenergie	$\Delta W_D = \frac{2k}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_2}; \quad (T_2 > T_1)$ $\Delta W_D = \frac{2k}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} \ln \frac{U_2}{U_1} \Big _{I=\text{const}}$ $\Delta W_D = \frac{2k}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} \left[\ln \frac{R_H(T_2)}{R_H(T_1)} + \underbrace{\frac{3}{4} \ln \frac{T_2}{T_1}}_{\text{wegen } N_L \sim T^{\frac{3}{2}}} \right]$ $\Delta W_D = \frac{2k}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} \left[\underbrace{\frac{3}{4} \ln \frac{T_2}{T_1}}_{\text{wegen } N_L \sim T^{\frac{3}{2}}} - \ln \frac{n(T_2)}{n(T_1)} \right]$	$\Delta W_A = \frac{2k}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_2}; \quad (T_2 > T_1)$ $\Delta W_A = \frac{2k}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} \ln \frac{U_2}{U_1} \Big _{I=\text{const}}$ $\Delta W_A = \frac{2k}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} \left[\ln \frac{R_H(T_2)}{R_H(T_1)} + \underbrace{\frac{3}{4} \ln \frac{T_2}{T_1}}_{\text{wegen } N_V \sim T^{\frac{3}{2}}} \right]$ $\Delta W_A = \frac{2k}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} \left[\underbrace{\frac{3}{4} \ln \frac{T_2}{T_1}}_{\text{wegen } N_V \sim T^{\frac{3}{2}}} - \ln \frac{p(T_2)}{p(T_1)} \right]$

8.5 Leitwert



Temperaturabhängig $\sigma(T) = \sigma(T_0) e^{\frac{\Delta W_D}{2k} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)}$
 Dotierungsabhängig $\sigma = q(n\mu_n + p\mu_p) = qn_i(\mu_n + \mu_p)$

$$\sigma_{min} = 2 \frac{\sqrt{\mu_n \mu_p}}{\mu_n + \mu_p} \sigma_i = 2 q n_i \sqrt{\mu_n \mu_p}$$

Verlustleistungsdichte $w = \sigma E_{eff}^2 = \sigma \frac{v_D^2}{\mu_n^2}$

8.6 Widerstand

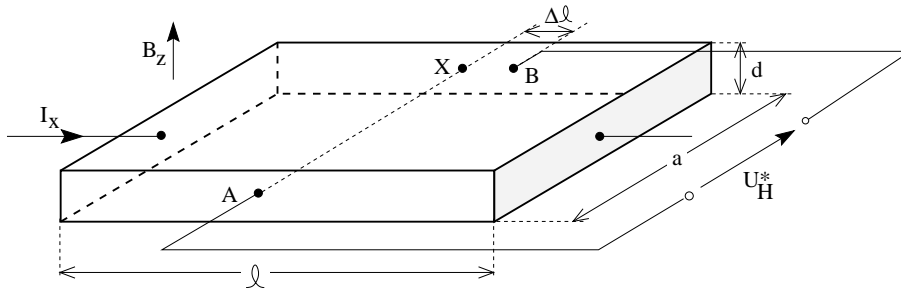
Temperaturabhängig $R(T) = R(T_0) e^{\frac{\Delta W_D}{2k} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)}$

Magnetfeldabhängig $R(B) = R_0 (1 + \tan^2 \theta) = R_0 (1 + \mu_n^2 B^2)$ mit $\tan \theta = -\mu_n B$

8.7 Halleffekt

Art: 193f, 276

In einer dünnen Platte der Dicke d und der Breite a fließe ein Gleichstrom $I_x = U_x/R_x$. Durch ein zur Platte senkrechtes Magnetfeld \vec{B} wirkt auf die driftenden Elektronen in der Platte eine Lorentzkraft, welche die Elektronen zu den seitlichen Rändern hin ablenkt. Es fällt die Hallspannung U_H (zwischen A und X) bzw. die Hallspannung mit Versatz U_H^* (zwischen A und B) senkrecht zu I_x und \vec{B} ab. Der Hallwinkel ist der Winkel zwischen Stromdichte \vec{J} und elektrischer Feldstärke \vec{E} . Ohne Feld ($BV = \vec{0}$), aber mit $I_x > 0$, liegt nur zwischen X und B die Versatzspannung an, weshalb $U_H^* > 0$, aber $U_H = 0$ ist.



Eine *Hallmessung* ermittelt die Ladungsträgerbeweglichkeiten und damit alle weiteren Werte: Hallkonstante, -winkel, -spannung, Bandabstand, Störstellendichte und Dotierungstyp (siehe unten).

Die Hallkonstante selber ist stark von der Temperatur und bei tieferen Temperaturen (Bereiche II und III) auch vom Dotierungstyp abhängig. Während im Eigenleitungsbereich (I) grundsätzlich gemischte Leitung vorliegt, ist in der Störstellenschöpfung (II) und der Störstellenreserve (III), die Hallkonstante sowie der Hallwinkel vom Leitungstyp abhängig.

U_H^* -Elektrodenabstand	a
U_H^* -Elektrodenversatz	$\Delta \ell$
Hallspannung bei	$\Delta \ell = 0 : U_H; \Delta \ell > 0 : U_H^*$
Dicke der Platte	d
Leitfähigkeit	σ
Verhältnis der Beweglichkeiten	$b = \frac{\mu_n}{\mu_p}$
Hallspannung ohne Versatz	$U_H = R_H \frac{I_x B}{d} = R_H \underbrace{\frac{U_x B}{R_x d}}_{\text{konst. Spannungsquelle}}$ mit $R_x = \frac{\ell}{\sigma_0 a d}$
Hallspannung mit Versatz	$U_H^* = U_H + I \frac{\Delta \ell}{a d \sigma}$
Hallwinkel	$\tan \theta = -\mu_n B$ (n-HL), $\tan \theta = \mu_p B$ (p-HL)

allgemein (z.B. gemischte Leitung) $\tan \theta = \sigma_0 R_H B$ mit $\sigma_0 = q(n\mu_n + p\mu_p)$

Hallkonstante:

Bereich I $R_{H,i} = \frac{1}{n_i q} \frac{\mu_p - \mu_n}{\mu_p + \mu_n}$ (Elektronen- und Löcherleitung!)

Grenze Bereich I-II $R_H = \frac{1}{q} \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{(p\mu_p + n\mu_n)^2} = \frac{1}{q} \frac{p - nb^2}{(p + nb)^2}$ (n-HL), $R_H = 0$ (p-HL)

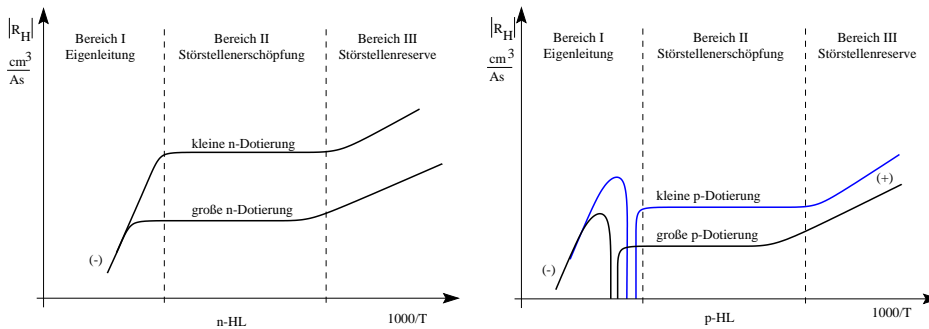
Bereich II und III $R_H = -\frac{1}{qn} = \text{const}$ (n-HL), $R_H = \frac{1}{qp} = \text{const}$ (p-HL)

Leitfähigkeit

Bereich I $\sigma_i = q(\mu_n + \mu_p)n_i \sim e^{-\frac{W_B}{2kT}}$

Bereich II und III $\sigma = nq\mu_n \sim T^{-\beta_n}$ (n-HL), $\sigma = pq\mu_p \sim T^{-\beta_p}$ (p-HL)

Berechnung der einzelnen Größen aus der Hallkennlinie:



Aus $|R_H|$ in **Eigenleitung**:

Bandenergie

$$W_B = \frac{2k}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} \left[\ln \frac{|R_H(T_2)|}{|R_H(T_1)|} + \underbrace{\frac{3}{2} \ln \frac{T_2}{T_1}}_{\text{wegen } N_L \sim T^{\frac{3}{2}}} \right]$$

(statt R_H geht auch σ)

Aus $|R_H|$ in **Störstellenschöpfung**:

n-HL: Donatordichte

$$N_D = n = \frac{1}{e|R_H|}$$

p-HL: Akzeptordichte

$$N_A = p = \frac{1}{e|R_H|}$$

Aus $|R_H|$ in **Störstellenreserve**:

Aktivierungsenergie der Störstellen:

$$\Delta W_{D/A} = \frac{2k}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} \left[\ln \frac{|R_H(T_2)|}{|R_H(T_1)|} + \underbrace{\frac{3}{4} \ln \frac{T_2}{T_1}}_{\text{wegen } N_{L/V} \sim T^{\frac{3}{2}}} \right]$$

(statt R_H geht auch σ)

p-HL: Dichte der aktivierten Störstellen: $N_D^+ = \frac{1}{e|R_H|}$

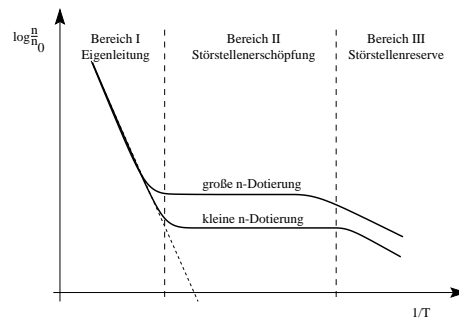
n-HL: Dichte der aktivierten Störstellen: $N_A^+ = \frac{1}{e|R_H|}$

8.8 Beweglichkeit

Arlt S.272b

	n – Halbleiter	p – Halbleiter
Beweglichkeit	$\mu_n = \frac{e\tau_n}{m_n^*}$	$\mu_p = \frac{e\tau_p}{m_p^*}$
Temperaturabhängigkeit	$\mu_n(T) = \mu_n(T_1) \left(\frac{T}{T_1}\right)^{\alpha_n}$	$\mu_p(T) = \mu_p(T_1) \left(\frac{T}{T_1}\right)^{\alpha_p}$
	$\mu_n \sim T^{\alpha_n}$	$\mu_p \sim T^{\alpha_p} \quad \alpha_p = \pm \frac{3}{2}, \text{ je nach Temperatur}$
	$\mu_n = -\frac{v_d}{E}$	$\mu_p = \frac{v_d}{E}$

8.9 Trägerdichten und Fermienergie im thermodynamischen Gleichgewicht



Zustandsdichten:

Leitungsband $z_L(W) dW = 4\pi \left(\frac{\sqrt{2m_n^*}}{n}\right)^3 \sqrt{W - W_L} dW \quad \text{für } W \geq W_L \quad (7.14a)$

Valenzband $z_V(W) dW = 4\pi \left(\frac{\sqrt{2m_p^*}}{n}\right)^3 \sqrt{W_V - W} dW \quad \text{für } W \leq W_V \quad (7.14b)$

Donatorniveau $z_D(W) = N_D \delta(W - W_D) \quad (7.14c)$

Akzeptorniveau $z_A(W) = N_A \delta(W - W_A) \quad (7.14d)$

8.10 Verteilungsfunktion der Ladungsträger

	Elektronen	Löcher
Fermiverteilung	$f_n(W) = \frac{1}{1 + e^{\frac{W - W_F}{kT}}} \quad (7.15)$	$f_p(W) = 1 - f_n(W) = \frac{e^{\frac{W - W_F}{kT}}}{1 + e^{\frac{W - W_F}{kT}}}$
Boltzmannverteilung	$f_n(W) \cong e^{-\frac{W - W_F}{kT}} \quad (7.16a)$	$f_p(W) \cong e^{\frac{W - W_F}{kT}} \quad (7.16b)$

Die Boltzmannverteilung ist nur dann anwendbar, wenn die Fermienergie einen Wert hat, der im verbotenen Band liegt, und wenigstens einen Abstand von $\cong 3kT$ von dem betrachteten Zustand hat.

Die Fermi-Statistik beschreibt z.B. die Elektronen-Loch-Verteilung, die Boltzmann-statistik beschreibt die Gas-Verteilung.

8.11 Effektive Besetzung

	Leitungsband	Valenzband
Anzahl der Ladungsträger Band	$n = \int_{W_L}^{\infty} z_L(W) f_n(W) dW$	$p = \int_{-\infty}^{W_V} z_V(W) f_p(W) dW$
	$n = N_L e^{-\frac{W_L - W_F}{kT}}$	$p = N_V e^{-\frac{W_F - W_V}{kT}}$

	Leitungsband	Valenzband
effektive Zustandsdichte	$N_L = 2 \left(\frac{2\pi m_n^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}$	$N_V = 2 \left(\frac{2\pi m_p^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}$
effektive Masse	$m_n^* = \left(\frac{N_L}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{2\pi kT}$	$m_p^* = \left(\frac{N_V}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{2\pi kT}$

Die Anzahl der Elektronen im Leitungsband hängt von der **relativen** Lage von W_L und W_V zueinander ab, und nicht von W_B oder den absoluten Größen W_L und W_V .

Massenwirkungsgesetz $np = n_i^2 = N_L N_V e^{-\frac{W_B}{kT}}$

Neutralitätsbedingung $p + N_D^+ = n + N_A^-$

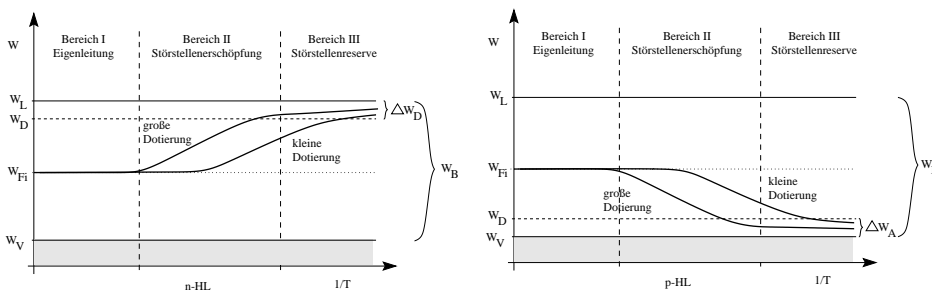
Bei n-Dotierung entfällt N_A^-

Bei p-Dotierung entfällt N_D^+

8.12 Störstellenniveaus

	Donatoren	Akzeptoren
	$N_D = N_D^0 + N_D^+$	$N_A = N_A^0 + N_A^-$
Störstellendichte neutral	$N_D^0 = \int z_D f_D dW = \frac{N_D}{1 + \frac{1}{2} e^{\frac{W_D - W_F}{kT}}}$	$N_A^0 = \frac{N_A}{1 + \frac{1}{2} e^{\frac{W_F - W_A}{kT}}}$
Störstellendichte ionisiert	$N_D^+ = \frac{N_D}{1 + 2e^{-\frac{W_D - W_F}{kT}}}$	$N_A^- = \frac{N_A}{1 + 2e^{-\frac{W_F - W_A}{kT}}}$
Ionisierte Störstellen [%]	$\frac{N_D^+}{N_D}$	$\frac{N_A^-}{N_A}$

8.13 Fermienergie



Bedingung $N_V e^{-\frac{W_F - W_L}{kT}} + N_D \left(1 - 2e^{-\frac{W_D - W_F}{kT}} \right) - N_L e^{-\frac{W_L - W_F}{kT}} = 0$

Fermienergie n-HL $W_{F_n} = \frac{W_V + W_L}{2} + \frac{3}{4} kT \ln \left(\frac{m_p^*}{m_n^*} \right) + kT \operatorname{arsinh} \frac{N_D}{2n_i}$

Fermienergie p-HL $W_{F_p} = \frac{W_V + W_L}{2} + \frac{3}{4} kT \ln \left(\frac{m_p^*}{m_n^*} \right) - kT \operatorname{arsinh} \frac{N_A}{2n_i}$

Letztere Formeln für die Fermienergie gelten nicht in der Störstellenreserve!
 Die Fermienergie ist solange von der Temperatur **unabhängig**, wie $kT \ll W_F$ gilt und ist eine thermodynamische Zustandsgröße für die Verteilung der Ladungsträger in Abhängigkeit von der Temperatur. Elektrisch verbundene Leiter und Halbleiter haben überall das gleiche Fermienergie.

8.14 Diffusionsspannung

$$\text{Diffusionsspannung} \quad U_D = \frac{kT}{e} \ln \left(\frac{N_D N_A}{n_i^2} \right)$$

$$\text{Energieversetzung} \quad |\Delta W| = |U_D|e$$

8.15 Rekombinationszeit

	n – Halbleiter	p – Halbleiter
Rekombinationszeit der Minoritäten	$\tau_{\text{Rek},p} = \frac{1}{\sigma_p v_{th} N_D}$	$\tau_{\text{Rek},n} = \frac{1}{\sigma_n v_{th} N_A}$
Partikelstromgleichung	$S_n = ne\mu_n E + eD_n \text{grad } n$	$S_p = pe\mu_p E - eD_p \text{grad } n$
Rekombinationsrate	$R_n = \frac{\Delta n}{\tau_{\text{Rek},n}}$	$R_p = \frac{\Delta p}{\tau_{\text{Rek},p}}$

Die Rekombination ist abhängig von Bandstruktur, Dichte der Rekombinationspartner, Dichte der Störstellen und der Temperatur.

8.16 Dioden

$$\text{Stromgleichung} \quad I = I_0 \left(e^{\frac{qU}{kT}} - 1 \right) \quad \text{mit} \quad I_0 = S_0 A$$

$$I_0 \sim n_i^2 \sim \left(T^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{w_B}{2kT}} \right)^2$$

8.17 Dielektrische Formeln

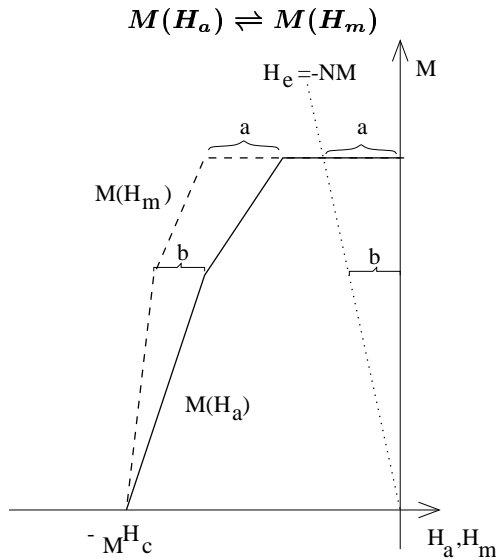
	n – Halbleiter	p – Halbleiter
Dielektrische Relaxationszeit	$\tau = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\sigma} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{N_D \mu_n e}$	$\tau = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\sigma} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{N_A \mu_p e}$
Driftgeschwindigkeit	$v_D = \mu_n E $	$v_D = \mu_p E $
Freie Weglänge	$\ell_F = v_{th} \tau_n = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \frac{\mu_n m^*}{e}$	$\ell_F = v_{th} \tau_p = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \frac{\mu_p m^*}{e}$

9 Magnetismus

9.1 Gleichungen

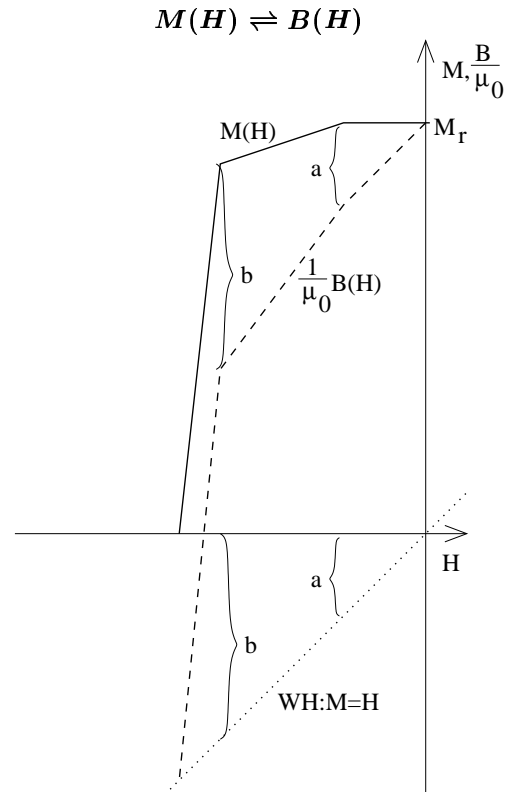
Induktion	$\vec{B}_m = \mu_0 \vec{H}_m + \vec{J}_m \quad \left[\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \right]$ $\vec{B}_m = \mu_0 (\vec{H}_m + \vec{M}_m) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}_m = \mu_0 \mu_r \vec{H}_m$ $\vec{B}_m = \mu_0 \mu_{eff} \vec{H}_a \quad \text{mit} \quad \mu_{eff} = \frac{B}{\mu_0 H_a} = \frac{\mu_r}{1 + N \chi_m}$
Magnetische Polarisation	$\vec{J} = \mu_0 \vec{M} \quad \left[\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \right]$ $\vec{J} = \mu_0 \chi_m \vec{H}_m \quad \text{mit} \quad \chi_m = \mu_r - 1$ $\vec{J} = \mu_0 \chi_{eff} \vec{H}_a \quad \text{mit} \quad \chi_{eff} = \frac{\chi_m}{1 + N \chi_m}$ $\vec{J} = \frac{\vec{p}}{V}$
Innere magn. Feldstärke	$H_m = H_i = H_a - N M_m = H_a - N \chi_m H_m = \frac{1}{1 + N \chi_m} H_a \quad \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$
Magnetisierung	$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = (\mu_r - 1) \vec{H} = n \vec{\mu} = \frac{\vec{\mu}}{V} \quad \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$
Magnetisches Dipolmoment	$\vec{\mu} = I \int_F d\vec{F} = I \vec{F}$
Magnetischer Dipol	$\vec{p}_m = \mu_0 \vec{\mu} = \mu_0 I \vec{F} = V \vec{J}$
Magnetischer Fluss	$\phi = \int_F \vec{B} d\vec{F}$
Magnetischer Widerstand	$R_m = \frac{\Theta}{\phi} = \frac{\ell}{\mu_0 \mu_r A} = \frac{n I}{\phi}$
Spulen:	
Anzahl der Wicklungen	w
induzierte Spannung	$U_{ind} = -w \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$
Induktivität	$L = w^2 \mu_0 \mu_{eff} \frac{A}{\ell}$
Magnetischer Fluss	$\phi = \frac{LI}{w}$
Magnetischer Widerstand	$R_m = \frac{wI}{\phi} = \sum \frac{\ell_i}{\mu_i A_i} = \frac{w^2}{L} = \frac{\ell}{A_L}$
Feld	$\sum H_i(t) \ell_i = wI(t)$

9.2 Scherung



Es gilt: $H_m = H_a - NM$

1. Einzeichnen der Entmagnetisierungsgerade $H_e = -NM$.
2. An jedem Knickpunkt den Abstand H_e von M -Achse zum H_a -Wert addieren ($M(H_a) \rightarrow M(H_m)$) bzw. vom H_m -Wert subtrahieren ($M(H_m) \rightarrow M(H_a)$).
3. Koerzitivfeldstärke bleibt erhalten!



Es gilt: $\frac{1}{\mu_0} B(H) = H + M(H)$

1. Einzeichnen der Winkelhalbierenden (WH) $M(H) = H$.
2. An jedem Knickpunkt den Abstand der WH zu H -Achse addieren ($B(H) \rightarrow M(H)$) bzw. subtrahieren ($M(H) \rightarrow B(H)$).
3. Remanenzinduktion/Magnetisierung bleibt erhalten!

9.3 gespeister Magnetkreis mit Meßspule

Der Magnetkreis bestehe aus n Stücken, der Längen ℓ_n und dem Querschnitt A_n . Eine Spule mit w_1 Windungen speist den Kreis. Sie wird vom Strom $I(t)$ durchflossen. Um das Stück n sei eine Meßspule mit w_2 Windungen gewickelt. So ein Meßkreis mit zwei Stücken gleichen Querschnitts, wovon der mit der Speisespule umwickelte bekannt sei, dient zur Bestimmung der magnetischen Eigenschaften des anderen Werkstoffes, um welchen die Meßspule führt.

Anzahl der Stücke

n

Speisestrom

$$I(t) = \hat{I} \sin \omega t$$

gemessene Messspannung

$$U(t) = \hat{U} \cos \omega t$$

Magnetfeld

$$H_1 \ell_1 + \dots + H_n \ell_n = w_1 I(t)$$

Fluß

$$\underbrace{B_1 A_1}_{\phi_1} = \underbrace{B_2 A_2}_{\phi_2} = \dots = \underbrace{B_n A_n}_{\phi_n}$$

Induktion

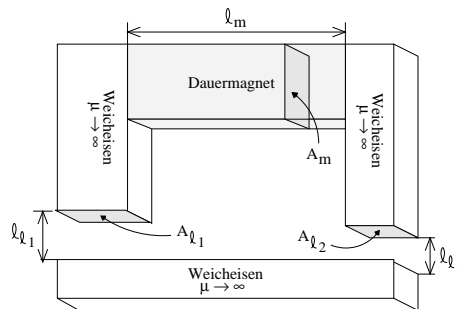
$$B_n = \mu_0 \mu_n H_n$$

$$\text{Meßspannung} \quad \hat{U} = -w_2 \frac{d}{dt} B_n A_n$$

9.4 Ringkern mit Luftspalt

Länge des Kerns	ℓ_m
Länge des Luftspalts	ℓ_L
Gesamtlänge	$\ell = \ell_m + \ell_L$
Flächen	A_m, A_L
Kraft im Luftspalt	$F_L = -\frac{1}{2} \mu_0 A_L H_L^2 = \frac{W_L}{\ell_L}$
Energie im Luftspalt	$W_L = \frac{1}{2} V_L H_L B_L$
Induktivität	$L = \frac{n^2 \mu_0 \mu_{eff} A_m}{\ell}$
Effektive Permeabilität	$\mu_{eff} = \frac{\mu_r}{1 + \frac{\ell_L}{\ell} \chi_m}$
Entmagnetisierungsfaktor	$N = \frac{\ell_L}{\ell} \approx \frac{\ell_L}{\ell_m}$
Induktionsgesetz	$U_{ind}(t) = -n \frac{d\phi}{dt}$
	$U_{ind}(t) = n A \mu_0 (\dot{H}_m(t) + \dot{M}_m(t))$
	Achtung: $H_m = H_a - N M_m$
	$U_{ind}(t) = -n A \mu_0 [\dot{H}_a(t) + (1 - N) \dot{M}_m(t)]$

9.5 Magnetkreis mit zwei Luftspalten



Ein Dauermagnet der Länge ℓ_m und dem Querschnitt A_m erzeugt von weichmagnetischen Schenkeln (dient nur zur Flussführung) über **zwei** Luftspalte der Längen ℓ_{ℓ_1} bzw. ℓ_{ℓ_2} und den Querschnitten A_{ℓ_1} bzw. A_{ℓ_2} eine Kraft F_{ges} auf ein weichmagnetisches Joch.

Aus $\oint H dl = 0$ folgt	$H_{\ell_1} \ell_{\ell_1} + H_{\ell_2} \ell_{\ell_2} + H_m \ell_m = 0$
Induktion	$B_{\ell_n} = \mu_0 H_{\ell_n}; B_m = \mu_0 H_m$
Fluß	$\phi = \underbrace{B_m A_m}_{\phi_m} = \underbrace{B_{\ell_1} A_{\ell_1}}_{\phi_{\ell_1}} = \underbrace{B_{\ell_2} A_{\ell_2}}_{\phi_{\ell_2}}$
Magnetische Feldstärke	$H_m = -B_m \frac{A_m}{\mu_0 \ell_m} \left(\frac{\ell_{\ell_1}}{A_{\ell_1}} + \frac{\ell_{\ell_2}}{A_{\ell_2}} \right) = -\frac{B_m}{\mu_0} N^*$
modifiz. Entmagnetisierungsfaktor	$N^* = \frac{A_m}{\ell_m} \left(\frac{\ell_{\ell_1}}{A_{\ell_1}} + \frac{\ell_{\ell_2}}{A_{\ell_2}} \right)$
Arbeitsgerade	$B_m(H_m) = -\frac{\mu_0}{N^*} H_m$

Kraft in einem Luftspalt	$F_{\ell_n} = -\frac{1}{2}\mu_0 A_{\ell_n} H_{\ell_n}^2 = -\frac{A_{\ell_n} B_{\ell}^2}{2\mu_0} = \frac{W_{\ell_n}}{\ell_{\ell_n}}$
Gesamtkraft auf Joch	$F_{ges} = F_{\ell_1} + F_{\ell_2}$
Sonderfall:	$A_{\ell_1} = A_{\ell_2} = A_{\ell}; \ell_{\ell_1} = \ell_{\ell_2} = \ell_{\ell}$
Magnetische Feldstärke	$H_m = -B_m \frac{2A_m \ell_{\ell}}{\mu_0 A_{\ell} \ell_m} = -\frac{B_m}{\mu_0} N^*$
modifiz. Entmagnetisierungsfaktor	$N^* = \frac{2A_m \ell_{\ell}}{A_{\ell} \ell_m}$
Arbeitgerade	$B_m(H_m) = -\mu_0 \frac{A_{\ell} \ell_m}{2A_m \ell_{\ell}} H_m$
Gesamtkraft auf Joch	$F_{ges} = -\mu_0 A_{\ell} H_{\ell}^2 = -A_{\ell} \frac{B_{\ell}^2}{\mu_0}$

9.6 Geradensteigung von Hysteresekurven

Grundfunktion	$B_m(H_m) = sH_m + K$ $M(H_m) = s^*M_m + K^*$
Steigung	$s = \frac{\Delta B_m}{\Delta H_m} = s^* + 1$ $s^* = \frac{\Delta M}{\Delta H_m} = s - 1$
Achsenabschnitt	$K = H_{eB} s^* = H_{ci} s^*$

9.7 Permeabilität

Permeabilität im offenen Kreis	$\mu_{eff} = \frac{1 + \chi_m}{1 + N\chi_m} = \frac{\mu_r}{1 + \frac{A_m \ell_{\ell}}{A_{\ell} \ell_m} (\mu_r - 1)}$	$k = \sqrt{\frac{\mu_r}{\mu_{r,eff}}}$
	$\mu_{eff} = \frac{\mu_r}{1 + N(\mu_r - 1)}$	
Anfangspermeabilität	$\mu_{ra} = \frac{1}{\mu_0} \left. \frac{dB}{dH} \right _{B=H=0}$	
reversible Permeabilität	$\mu_{r,rev} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\Delta B}{\Delta H}$	
differentialle Permeabilität	$\mu_{r,diff} = \frac{1}{\mu_0} \left. \frac{dB}{dH} \right _{B,H}$	
Amplitudenpermeabilität	$\mu_{r,tot} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\widehat{B}}{\widehat{H}}$	
Komplexe Permeabilität	$\underline{\mu}_r = \mu_r' - j\mu_r'' \quad \tan \delta_m = \frac{\mu_r''}{\mu_r'}$	
Temperaturkoeffizienten	$TK_{\mu_{eff}} < TK_{\mu_m}$ $TK_{\mu_{eff}} = \frac{1 - N}{1 + N\chi_m} TK_{\mu_m}$ $TK_{\mu_{eff}} = \frac{\mu_{eff}}{\mu_m} TK_{\mu_m} \quad \text{für } N \ll 1 : N \sim TK_L$	

9.8 Verluste

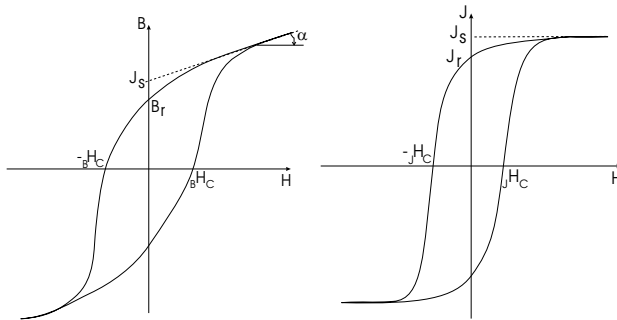
Wirbelstromverluste

im Leiter (Radius R)	$\frac{P_W}{m} = \frac{B_{eff}^2 \omega^2 \sigma R^2}{8\rho} \quad \text{mit } m = \rho V$
im Blech (Dicke d)	$\frac{P_W}{m} = \frac{B_{eff}^2 \omega^2 \sigma d^2}{12\rho} = \frac{\widehat{B}^2 \omega^2 \sigma d^2}{24\rho}$
Gesamtverluste	$P_{ges} = P_W + P_H + P_N$

$$\frac{P}{m} \approx \underbrace{c_w f^2 H_{eff}^2}_{\text{Wirbelstromverluste}} + \underbrace{c_H f H_{eff}^3}_{\text{Hystereseverluste}} + \underbrace{c_N f H_{eff}^2}_{\text{Nachwirkungsverluste}}$$

mit $H = \frac{nI}{\ell}$

$$\frac{P}{I_{eff}^2} \approx \underbrace{k_w f^2}_{R_W} + \underbrace{k_H f I_{eff}}_{R_H} + \underbrace{k_N f}_{R_N}$$



Markante Punkte der Hysteresekurve

Sättigungspolarisation	J_s
Remanente Induktion	B_r
Remanente Polarisation	J_r
Koerzitivfeldstärke bezüglich B	$B H_C$
Koerzitivfeldstärke bezüglich J	$J H_C$

9.8.1 Diamagnetismus

Jeder Werkstoff ist diamagnetisch. Allerdings überwiegen die anderen Formen des Magnetismus den Diamagnetismus, so daß sie ihn – sind sie vorhanden – überdecken.

- Permeabilität $\mu_{r,dia} < 1$
- Suszeptibilität $-1 < \chi_{m,dia} < 0$
- Temperaturabhängigkeit **keine**
- Beispiele: Ag, Au, Bi, Cu, H_2 , N_2

9.8.2 Paramagnetismus

Unauffüllte Elektronenschalen bzw. eine ungerade Anzahl von Elektronen führen zu nicht vollständig kompensierten magnetischen Dipolmomenten. Diese Dipole sind regellos ausgerichtet. Erst ein äußeres Magnetfeld richtet die Elementarmagnete gegen ihre thermische Bewegung aus. Es gilt das *Curiesche Gesetz*.

- Permeabilität $\mu_{r,para} \approx 1$
- Suszeptibilität $10^{-6} < \chi_{m,para} < 10^{-3}$
- Curiekonstante $C [K]$
- Temperaturabhängigkeit $\chi_{m,para} = \frac{C}{T}$ (Curie-Gesetz)
- Beispiele: Sn, Pt, W, Al, O_2

9.8.3 Ferromagnetismus

Unauffüllte innere Elektronenschalen (Übergangsmetalle) erzeugen gleichgerichtete magnetische Dipolmomente. Durch Anlegen eines äußeren Magnetfeldes werden die Weißschen Bezirke (Kristallbereiche gleicher Magnetisierung) zunehmend in Feldrichtung ausgerichtet. Dieser Effekt wird mit zunehmender Temperatur gestört. Oberhalb der *ferromagnetischen Curie-Temperatur* T_c sind ferromagnetische Werkstoffe *paramagnetisch*.

- Permeabilität $\mu_{r,ferro} \gg 1$
- Suszeptibilität $10^{-2} < \chi_{m,ferro} < 10^5$
- Curiekonstante $C [K]$
- paramagnetische Curie-Temperatur $\Theta [K]$
- Temperaturabhängigkeit $T > \Theta$ $\chi_{m,ferro} \approx \frac{C}{T - \Theta}$ (Curie-Weiß-Gesetz)
- Beispiele: Co, Fe, Gd, Ni

9.8.4 Ferrimagnetismus

Ähnlich dem Ferromagnetismus liegen beim Ferrimagnetismus jedoch zwei ferromagnetische Untergitter vor, welche **ungleichstark** und antiparallel ausgerichtet sind. Oberhalb der *Néel-Temperatur* T_N sind ferrimagnetische Werkstoffe *paramagnetisch*.

Permeabilität	$\mu_{r,ferrif} \gg 1$
Curiekonstante	$C [K]$
Néel-Temperatur	$T_N [K]$
Temperaturabhängigkeit $T > T_N$	$\chi_{m,ferrif} \approx \frac{C}{T + T_N}$ (abgewandeltes Curie-Weiß-Gesetz nach Néel)
Beispiele:	FeO, NiO, CoO, CrF_3 , FeF_3 , CoF_3

9.8.5 Antiferromagnetismus

Ähnlich dem Ferromagnetismus liegen beim Antiferromagnetismus jedoch zwei ferromagnetische Untergitter vor, welche gleichstark, aber antiparallel ausgerichtet sind. Oberhalb der *Curie-Temperatur* T_c sind ferrimagnetische Werkstoffe *paramagnetisch*.

Permeabilität	$\mu_{r,antif} \gg 1$
Curiekonstante	$C [K]$
paramagnetische Curie-Temperatur	$\Theta [K] \quad (\Theta < 0)$
Temperaturabhängigkeit $T > T_N$	$\chi_{m,antif} \approx \frac{C}{T - \Theta}$ (Curie-Weiß-Gesetz)
Beispiele:	MeO·Me ₂ O ₃ (statt Me: Fe, Ni, Co) – Ferrite

9.9 Fakten über Magnete

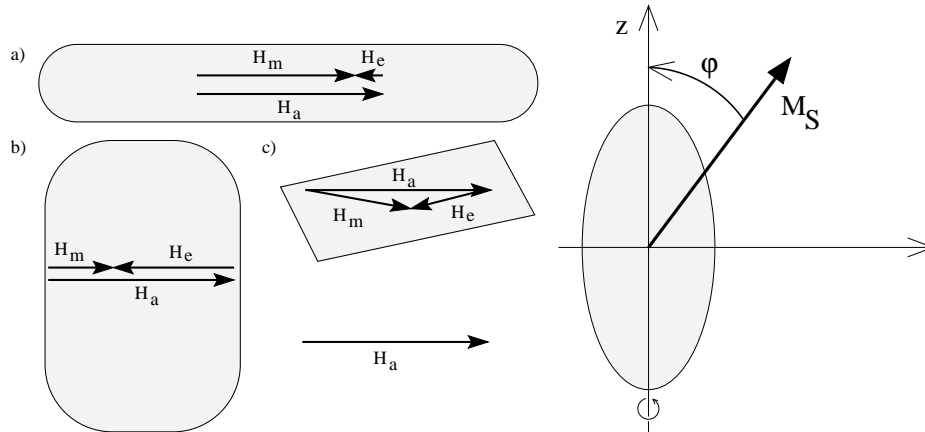
- Hartmagnete • feste und wenige Blochwände \Rightarrow Anisotropieenergie hoch weil Kristallfehler Dipole festhalten
 - Verwendung von eindomänigen Teilchen
 - Vermeidung von Blochwänden oder niedrigen Blochwandbeweglichkeiten
- Weichmagnete • viele und leicht bewegliche Blochwände \Rightarrow Anisotropieenergie niedrig
 - Magnete • Dia- und Paramagnetwerkstoffe bei denen $|\chi_m| \ll 1$ sind keine mag. Werkstoffe
 - Ferromagnet • bei großem M_s ist die Domänenaufspaltung energetisch begünstigt
 - oberhalb von T_c paramagnetisch
 - Ferrimagnet • hohen Widerstand
 - geringe Wirbelstromverluste
 - große Induktivität
 - Anwendung bei Mikrowelle, hohen Frequenzen im GHz
 - oberhalb von T_c paramagnetisch
 - Diamagnet • kein Gesamtdrehimpuls \Rightarrow kein permanent Dipol
 - ein H-Feld bewirkt nur induzierte Dipole
 - Induktionsstoß auf Elektronenbahn
 - nach Lenzscher Regel sind induzierte Ströme dem Feld entgegengerichtet $\Rightarrow \chi_m$ negativ
 - temperaturunabhängig
- Abmagnetisierungsarten • Erwärmung des Werkstoffes über Curie-Temperatur
 - Wechselfeld-Abmagnetisierung
 - Aussteuerung zum Punkt P (im dritten Quadranten in der Nähe des Ursprungs) bei Abschalten des Feldes \Rightarrow scheinbare Abmagnetisierung

- Mag. Skineffekt • Wirbelströme im Kern erzeugen selbst ein Magnetfeld nach Lenzscher Regel \Rightarrow Feldschwächung am größten am Achskern
- Barkhausensprünge • irreversible Magnetisierung
 - Domänenwände heben sich auf
 - Ferromagnet hat z.B. Domänenwände
- Trafoleche • Sättigungsmagnetisierung $B = 2T$
 - Sättigung schon bei kleinen H-Feldern
 - große Permeabilität $\mu_r = 130000$
 - möglichst kleine Hysterese- und Wirbelstromverluste
 - kleine Leitfähigkeit
 - leichte Verschiebung der Domänenwände
- Sättigung • erhöht den Fluß Φ
 - keine oder leicht überwindbare Domänenwände
- Abschirmung von magnetisch hochfrequenten Feldern • durch z.B. Mumetall, Permalloy, Ultraperm u.v.m.
 - große Anfangspermeabilität
 - große spezifische Leitfähigkeit

10 Magnetische Anisotropie

10.1 Formanisotropie

Art: S. 331f, 360



Das resultierende innere Feld H_m ist homogen, wenn es das äußere H_a auch ist. Die Richtung des inneren Feldes H_m ist jedoch abhängig vom Winkel des entmagnetisierenden Feldes H_e im Werkstoff (siehe Beispiel c).

$$\text{Gesamtfeld} \quad \vec{H}_m = \vec{H}_a + \vec{H}_e = \vec{H}_a - \vec{N}\vec{M} = \vec{H}_a - \frac{\vec{N}\vec{J}}{\mu_0}$$

$$\text{Entmagnetis.-tensor} \quad \vec{N} = \begin{pmatrix} N_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & N_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & N_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\text{Kugel} \quad N_{xx} = N_{yy} = N_{zz} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Rotationsellipsoide} \quad N_{xx} = N_{yy} = N_{\perp}, \quad N_{zz} = N_{\parallel}, \quad 2N_{\perp} + N_{\parallel} = 1$$

$$\text{gestrecktes R.-E. (a)} \quad N_{\perp} > N_{\parallel}$$

$$\text{„Zigarre“} \quad N_{\perp} \approx \frac{1}{2}, \quad N_{\parallel} \approx 0; \quad H_m = H_a - N_{\parallel}M \approx H_a$$

$$\text{flaches R.-E. (b)} \quad N_{\perp} < N_{\parallel}; \quad H_m = H_a - N_{\parallel}M \approx H_a$$

$$\text{„Linse“} \quad N_{\perp} \approx 0, \quad N_{\parallel} \approx 1; \quad H_m = H_a - N_{\parallel}M \approx 0$$

$$\text{Selbstenergiedichte} \quad w_F = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2\mu_0} J_S^2 [N_{\parallel} \cos^2 \varphi + N_{\perp} \sin^2 \varphi]$$

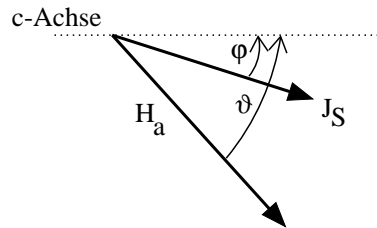
$$w_F = \frac{1}{2\mu_0} J_S^2 [N_{\parallel} + (N_{\perp} - N_{\parallel}) \sin^2 \varphi] = \frac{1}{2\mu_0} J_S^2 [N_{\perp} + (N_{\parallel} - N_{\perp}) \cos^2 \varphi]$$

folgt aus $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$
folgt aus $\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$

10.2 Kristallanisotropie

Art: S.361

Kristallanisotropie findet sich in jedem Magnetwerkstoff. Es bezeichnet die Abhängigkeit der spontanen Magnetisierung einer Elementarzelle (eines Kristalls) von der Richtung. In einigen Kristallen (z.B. dem hexagonalen Kobalt) ist die Magnetisierung nur parallel oder antiparallel zur Kristallachse möglich. In anderen Stoffen (z.B. dem kubischen Eisen) ist die spontane Magnetisierung in allen $\langle 100 \rangle$ Richtung möglich. Diese Richtung heissen *leichte Richtungen*.



$\angle(\text{Polarisation } J_s; c\text{-Achse})$	φ
$\angle(\vec{H}_a\text{-Feld; } c\text{-Achse})$	ϑ
$\angle(\vec{H}_a\text{-Feld; Polarisation } J_s)$	$(\vartheta - \varphi)$
Kristallanisotropieenergiedichte	$w_k = \frac{W_k}{V} = K_0 + K_1 \sin^2 \varphi + K_2 \sin^4 \varphi \dots$
Anisotropiekonstanten	$K_i \quad \left[\frac{W_s}{\text{cm}^3} \right]$
Anisotropieterm 0.Ordnung	$K_0 = \text{const} \not\propto \varphi$
Anisotropieterm 1.Ordnung	$K_1 \sin^2 \varphi \quad \text{mit } K_1 = \frac{H_A J_s}{2}$
Anisotropieterm n.Ordnung	$K_n \sin^{2n} \varphi$ für $n \geq 2$ wird häufig vernachlässigt.
Anisotropiefeldstärke	$H_A = \frac{2K_1}{J_s}$
potentielle Energiedichte	$w_{pot} = \frac{W_{pot}}{V} = -J_s H_a \cos(\vartheta - \varphi) = -\mu_0 M_s H_a \cos(\vartheta - \varphi)$ (weil Magnetisierung nicht in Richtung des Außenfeldes zeigt)
gesamte Energiedichte	$w_{ges}(\varphi) = w_k + w_{pot} = (K_0 + K_1 \sin^2 \varphi) - J_s H_a \cos(\vartheta - \varphi)$
Minimum der Energie bei	$\frac{\partial w_k}{\partial \varphi} = 0$ und $\frac{\partial^2 w_k}{\partial \varphi^2} > 0$ $\frac{\partial w_k}{\partial \varphi} = K_1 2 \sin \varphi \cos \varphi - J_s H_a \sin(\vartheta - \varphi) = K_1 \sin 2\varphi - J_s H_a \sin(\vartheta - \varphi)$
Drehmoment	$T = \frac{\partial W_{ges}}{\partial \vartheta} = V \frac{\partial w_{ges}}{\partial \vartheta}$
Richtmoment	$C = \left. \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \right _{\vartheta=0^\circ}$

Es gibt zwei Formen der Kristallanisotropie — die einachsige (*uniaxiale*) und die *kubische* Anisotropie. Erstere wird noch nach eindomänigen und polydomänigen Kristallen unterschieden. Bei der Betrachtung der Kristallanisotropie werden häufig Kugeln verwendet, um die Formanisotropie auszuschalten.

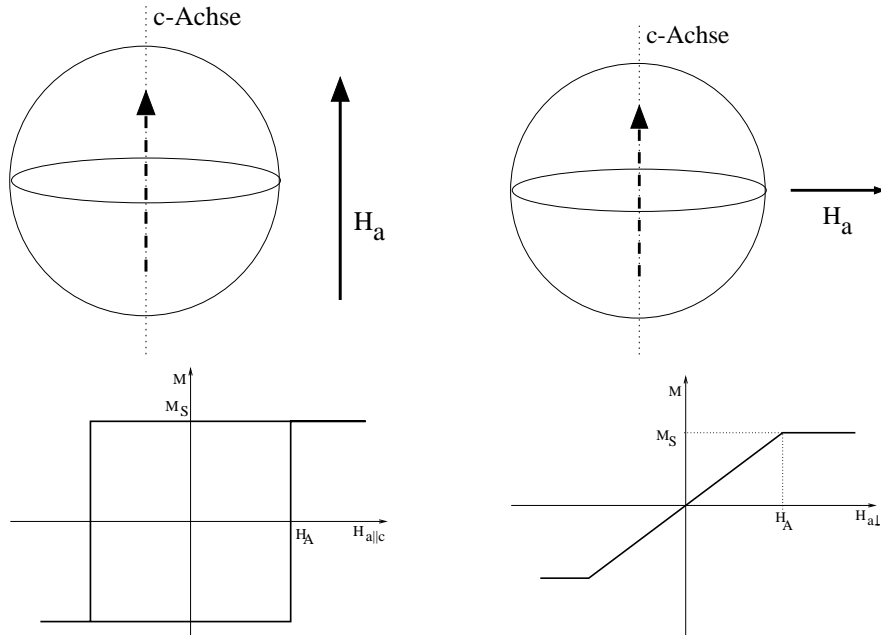
10.2.1 Einachsige (uniaxiale) eindomänige Kristallanisotropie

Tritt auf bei tetragonalen, hexagonalen und rhomboedrischen Kristallen.

einachsige Anisotropie $K_1 > 0$

effektive Anisotropiefeldstärke $H'_A = H_A + M_s(N_\perp - N_\parallel)$

Feld in leichte Richtung $\varphi = 0^\circ$ oder $\varphi = 180^\circ$ Feld in schwere Richtung $\varphi = 90^\circ$

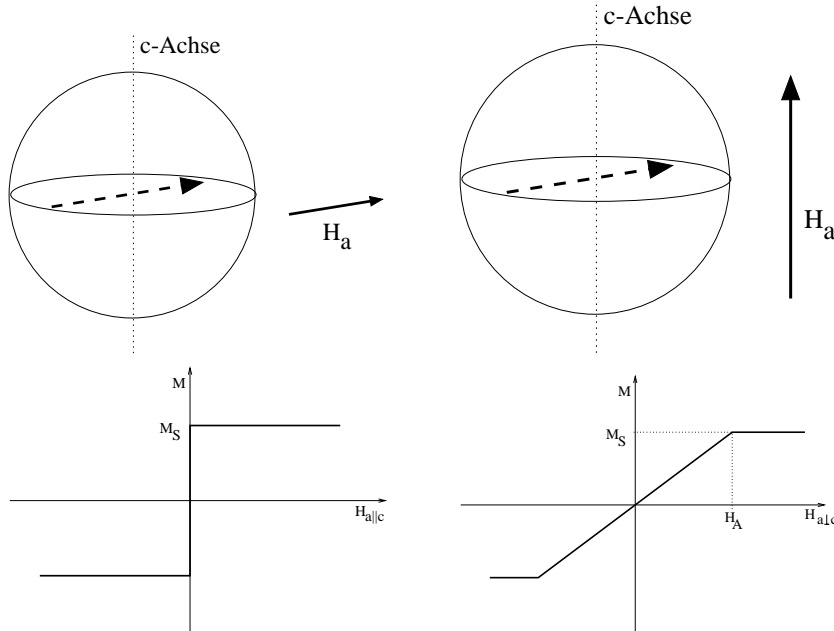


planare Anisotropie

$$K_1 < 0$$

effektive Anisotropiefeldstärke $H'_A = H_A + M_S(N_{\parallel} - N_{\perp})$

Feld in leichte Richtung $\varphi = \pm 90^\circ$ Feld in schwere Richtung $\varphi = \text{beliebig}$



10.2.2 Einachsige (uniaxiale) polydomänige Kristallanisotropie

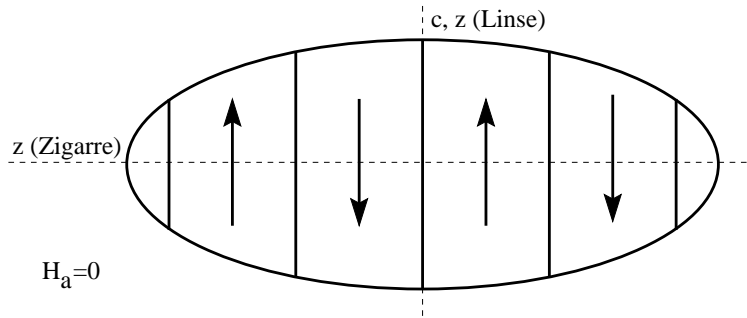
Der polydomänige Werkstoff zeigt ohne äusseres Magnetfeld auch kein grosses inneres Feld, da sich die Magnetisierung der einzelnen Domänen so ausrichtet, dass die Gesamtenergie im Werkstoff ein Minimum aufweist. Je nach äusserem Feld finden dann Dreh- oder Wandverschiebungsprozesse statt. Drehprozesse sind energetisch ungünstiger, weshalb die Richtung dann auch schwere Richtung heisst.

10.2.3 Polydomänige Kristall- und Formanisotropie

Treffen Form- und (einachsige) Kristallanisotropie zusammen, so gibt es eine Vielfalt von Möglichkeiten. Die Kristallachse liegt hier immer in der Senkrechten. Die

Rotationsachse kann sowohl in der Senkrechten, als auch in der Waagerechten liegen und wird in den Diagrammen relativ zum Außenfeld als $H_a \parallel z$ bzw. $H_a \perp z$ angegeben:

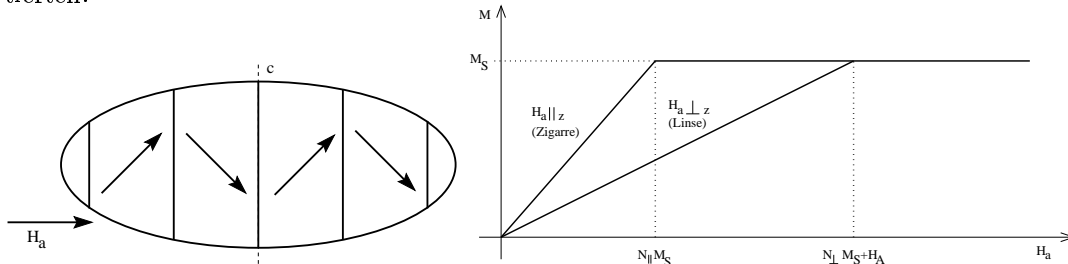
Ausgangslage:



Kein Außenfeld vorhanden, aber zwei mögliche Rotationsachsen z !

Drehprozesse ($H_a \perp c$):

Vergrößerung der günstig orientierten Domänen auf Kosten der ungünstig orientierten:



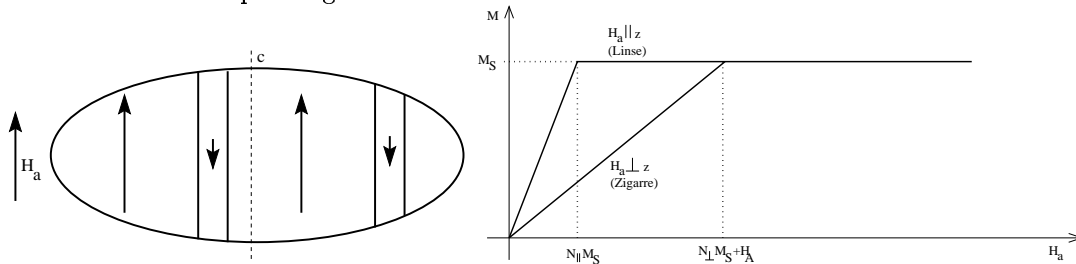
Erreichen der Sättigung in L.R. der Formanisotropie: $H_a = N_{\parallel} M_S$

Erreichen der Sättigung in S.R. der Formanisotropie: $H_a = N_{\perp} M_S + H_A$

Anisotropiefeldstärke: $H_A = M_S(N_{\perp} - N_{\parallel})$

Wandverschiebung ($H_a \parallel c$):

Hineindreihen der Magnetisierung der Domänen in die in die Feldrichtung entgegen der Kristallanisotropieenergie.



Erreichen der Sättigung in L.R. der Formanisotropie: $H_a = N_{\parallel} M_S + H_A$

Erreichen der Sättigung in S.R. der Formanisotropie: $H_a = N_{\perp} M_S + H_A$

Anisotropiefeldstärke: $H_A = M_S(N_{\perp} - N_{\parallel})$

10.2.4 Kubische Kristallanisotropie

Kubische Anisotropie hat immer viele Anisotropieachsen.

Selbstenergiedichte $w_k = K_0 + K_1 \frac{J_x^2 J_y^2 + J_y^2 J_z^2 + J_z^2 J_x^2}{J_s^4} + K_2 \frac{J_x^2 J_y^2 J_z^2}{J_s^6}$

$$w_k = K_0 + K_1(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2) + K_2\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2$$

$$\text{mit } \alpha_i = \cos \varphi_i = \frac{J_i}{J_s}$$

Minimum Berechnung für $K_1 > 0$ $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ oder Permutation der Indizes

Minimum Berechnung für $K_1 < 0$ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

10.3 Quasi-Anisotropie

Vergleicht man die Form- mit der Kristallanisotropie, so kann man Zusammenhänge herstellen. Liegen sowohl Kristall-, wie auch Formanisotropien vor, ergibt sich Selbstenergiedichte

bei Kristall- und Formanisotropie $w = w_k + w_F$

Quasi-Anisotropiekonstante 0.Ordnung $K_0^* = K_0 + \frac{1}{2\mu_0} J_s^2 N_{\parallel} = \text{const}$

Quasi-Anisotropiekonstante 1.Ordnung $K_1^* = K_1 + \frac{1}{2\mu_0} J_s^2 (N_{\perp} - N_{\parallel})$

Quasi-Anisotropiefeldstärke $H_A^* = \frac{2K_1}{J_s} + \frac{1}{\mu_0} J_s (N_{\perp} - N_{\parallel}) = \frac{2K_1}{\mu_0 M_s} + M_s (N_{\perp} - N_{\parallel})$

10.4 Spannungsanisotropie

Art: (S.309)

Sättigungsmagnetostraktion $\lambda_s = \frac{\Delta \ell}{\ell} = Q_m J^2$

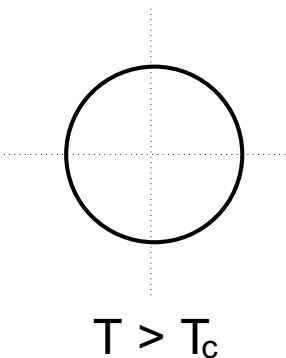
Energiedichte $w_{\sigma} = -\frac{3}{2} \lambda_s \sigma \cos^2 \varphi$

Bei $\lambda_s > 0$ ändert sich nichts am Formanisotropieverhalten
d.h. lange Achse bleibt Vorzugsrichtung

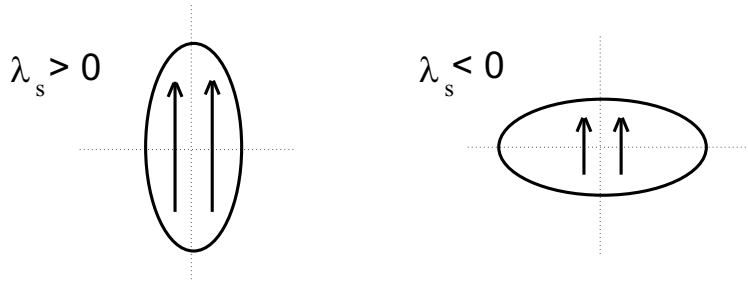
Bei $\lambda_s < 0$ kurze Achse wird Vorzugsebene

10.4.1 thermische Spannungsanisotropie

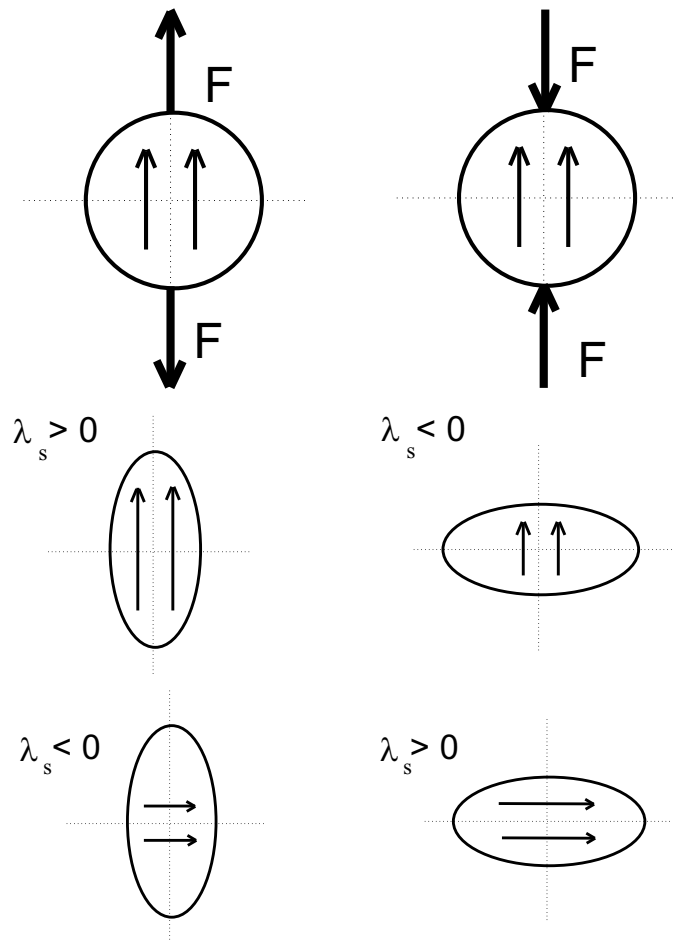
Bei der spontanen Polarisation tritt auch eine spontane Deformation auf. Wenn eine einkristalline Kugel ohne magnetisches Moment durch Abkühlung unter die Curie-Temperatur spontan eindomänig polarisiert wird, verformt sie sich zu einem Rotationsellipsoid. Eine Kugel



wird durch Abkühlung unter T_C :



10.4.2 mechanische Spannungsanisotropie



10.4.3 Die Blochwand

Weißches Molekularfeld	H_W
Dipolmoment	p_m
Volumen eines Dipols (Tetraeder)	$V_a = a^2 c$
Drehung aus H_W	$\Delta\varphi$
Energieaufwand je Dipol	$\Delta W_{pot} = p_m H_W \frac{\Delta\varphi^2}{2}$
Energie für 180°-Wand	$W_{pot}(n) = n\Delta W_{pot} = p_m H_W \frac{\pi^2}{2n} = kT_C \frac{\pi^2}{2n}$ (weil $p_m H_W = kT_C$)
Kristallanisotropie je Dipol	$\Delta W_A = V_a K_1 \sin^2 \varphi$
Kristallanisotropie der Wand	$W_A(n) = n\Delta W_A = nV_a K_1 \frac{1}{2}$ (weil $\langle \sin^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2}$)
Gesamtenergie der Wand	$W_{ges}(n) = W_{pot}(n) + W_A(n) = \frac{kT_C \pi^2}{2n} + \frac{nV_a K_1}{2}$

Minimum bei

$$n_0 = \pi \sqrt{\frac{kT_C}{V_a K_1}}$$

Wanddicke

$$\delta_0 = a n_0 = \pi \sqrt{\frac{kT_C}{cK_1}}$$

11 Dielektrika

11.1 Allgemein

komplexe Dielektrizität	$\underline{\varepsilon}_r = \frac{\hat{D}}{\varepsilon_0 \hat{E}} = \varepsilon' - j\varepsilon''$ $\underline{\varepsilon}_r = \varepsilon_\infty + \frac{\Delta\varepsilon_r}{1 + (\omega\tau)^2} - j \left(\frac{\sigma_{\equiv}}{\omega\varepsilon_0} + \frac{\omega\tau\Delta\varepsilon_r}{1 + (\omega\tau)^2} \right)$ $ \underline{\varepsilon}_r = \sqrt{\varepsilon_\infty^2 + \frac{2\varepsilon_\infty\Delta\varepsilon_r + \Delta\varepsilon_r^2}{1 + (\omega\tau)^2}}$ <p style="text-align: center;">ohne Gleichstromanteil</p> $ \underline{\varepsilon}_r = \sqrt{\varepsilon_\infty^2 + \left(\frac{\sigma_{\equiv}}{\omega\varepsilon_0} \right)^2 + \frac{2\frac{\sigma_{\equiv}}{\varepsilon_0}\Delta\varepsilon_r + 2\varepsilon_\infty\Delta\varepsilon_r + \Delta\varepsilon_r^2}{1 + (\omega\tau)^2}}$ <p style="text-align: center;">mit Gleichstromanteil</p>
Reversible Dielektrizität	$\varepsilon_{rev} = \varepsilon' = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\Delta D}{\Delta E}$
reelle Dielektrizitätszahl	$\varepsilon' = \varepsilon_\infty + \frac{\Delta\varepsilon_r}{1 + (\omega\tau)^2}$
imaginäre Dielektrizitätszahl	$\varepsilon'' = \frac{\sigma_{\equiv}}{\omega\varepsilon_0} + \frac{\Delta\varepsilon_r\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \neq f(T)$
	$\varepsilon''_{max} = \frac{\Delta\varepsilon_r}{2} \quad \text{für } \omega\tau = 1$
Polarisationsdielektrizität	$\varepsilon_r = \frac{2n\alpha + 3\varepsilon_0}{3\varepsilon_0 - n\alpha} \quad (4.40 \text{ nach } \varepsilon_r \text{ aufgelöst})$
Kramers-Kronig-Relation	$\varepsilon'' = (\varepsilon' - \varepsilon_\infty)\omega\tau \quad \text{und} \quad \varepsilon' = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon''}{\omega\tau} \quad (4.62a,b)$
Brechungsindex	$n = \underbrace{\sqrt{\varepsilon_\infty}}_{\text{Elektronenpolarisation}} = \underbrace{\sqrt{\varepsilon'}}_{\text{unpolare Stoffe}}$
statische Dielektrizitätszahl	$\varepsilon_{stat} = \varepsilon' _{\omega=0}$ $\varepsilon_{stat} = \varepsilon_\infty \left\{ 2 \tan^2 \delta_{max} + 1 + \sqrt{(2 \tan^2 \delta_{max} + 1)^2 - 1} \right\}$
Relaxationsstufe	$\Delta\varepsilon_r = \frac{2\varepsilon_\infty(\varepsilon' _{\omega\tau=1} - \varepsilon_\infty)}{2\varepsilon_\infty - \varepsilon' _{\omega\tau=1}}$ $\Delta\varepsilon_r = \varepsilon_{stat} - \varepsilon_\infty$
Elektronische Ladungsdichte	$p = -\frac{3q}{4\pi R^3}$
Wirk- oder Verlustleistungsdichte	$\bar{p} = \frac{\bar{P}}{dA} = \frac{1}{2} \omega\varepsilon_0 \varepsilon'' \hat{E}^2 = \omega\varepsilon_0 \varepsilon'' \hat{E}_{eff}^2 = \sigma_{\equiv} \hat{E}_{eff}^2$
Flächenladungsdichte	$\rho_F = D = \varepsilon_0 E + P = \frac{Q}{A}$
Stromdichte	$S = -nev_D = \dot{D} = \varepsilon_0 \dot{E} = \omega\varepsilon_0 (\varepsilon'' + j\varepsilon') E \quad \text{mit } E = \hat{E} e^{j\omega t}$

Polarität • polare Stoffe besitzen remanente Dipole

• unpolare Stoffe haben nur Elektronenpolarisation

Isolatoren • gute Isolatoren haben eine dielektrische Relaxationszeit (Selbstentladezeit) von mehreren Stunden, Tagen oder Wochen

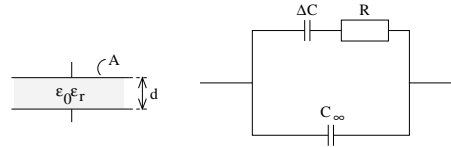
• Mittelpunkt des Cole-Cole-Diagramm fällt dann unter die ε' -Achse

• $\omega\tau_e \gg 1$

11.2 ESB der Debye-Relaxation

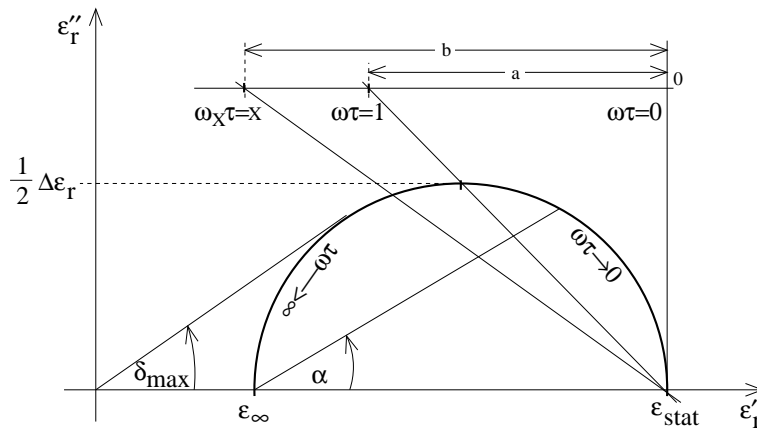
Arlt: S.146f

$$\begin{aligned} C_0 &= \varepsilon_0 \frac{A}{d} \\ C_\infty &= \varepsilon_\infty C_0 \\ \Delta C &= \Delta \varepsilon_r C_0 \\ R &= \frac{\tau}{\Delta C} \end{aligned}$$



11.3 Cole–Cole–Diagramm

Arlt: S.148



Cole-Cole-Diagramm
$$\varepsilon''(\varepsilon') = \frac{\tau \sigma}{\varepsilon_0 \sqrt{\frac{\Delta \varepsilon_r}{\varepsilon' - \varepsilon_\infty} - 1}} + (\varepsilon' - \varepsilon_\infty) \sqrt{\frac{\Delta \varepsilon_r}{\varepsilon' - \varepsilon_\infty} - 1}$$

Frequenzgang
$$f(\varepsilon', \varepsilon'') = \frac{1}{2\pi\tau} \sqrt{\frac{\Delta \varepsilon_r}{\varepsilon' - \varepsilon_\infty} - 1}$$

Ortswinkel
$$\tan \alpha = \omega\tau = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon' - \varepsilon_\infty}$$

Verlustfaktor
$$\tan \delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} [1 + (\omega\tau)^2] + \omega\tau \Delta \varepsilon_r}{[1 + (\omega\tau)^2] \varepsilon_\infty + \Delta \varepsilon_r}$$

maximaler Verlustfaktor
$$\tan \delta_{max} = \frac{\varepsilon_{stat} - \varepsilon_\infty}{2\sqrt{\varepsilon_{stat}\varepsilon_\infty}} = \frac{\Delta \varepsilon_r}{2\sqrt{\varepsilon_{stat}\varepsilon_\infty}}$$

δ_{max} liegt bei
$$\omega\tau = \sqrt{\frac{\varepsilon_{stat}}{\varepsilon_\infty}} = \sqrt{1 + \frac{\Delta \varepsilon_r}{\varepsilon_\infty}}$$

Parametrierung
$$\omega_x \tau = X = \frac{b}{a}$$

11.3.1 Konstruktion aus ε_∞ und $\Delta \varepsilon_r$

1. ε_∞ einzeichnen.
2. $\varepsilon_{stat} = \varepsilon_\infty + \Delta \varepsilon_r$ einzeichnen.
3. Mittelpunkt ist $\varepsilon_{stat} = \varepsilon_\infty + \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_r$, Radius $\frac{1}{2} \Delta \varepsilon_r$.

11.3.2 Konstruktion aus ε_∞ und δ_{max}

1. ε_∞ einzeichnen.
2. δ_{max} einzeichnen.
3. Parallele zu ε'' -Achse in ε_∞ einzeichnen.

4. Um Schnittpunkt von ε'' -Parallele und δ_{max} -Gerade einen Kreis durch ε_∞ schlagen. Dieser schneidet die δ_{max} -Gerade im Berührungspunkt.
5. Senkrechte zu δ_{max} -Gerade im Berührungspunkt schneidet ε' -Achse im Mittelpunkt.
6. Kreis um Mittelpunkt durch ε_∞ schlagen.

11.3.3 Konstruktion aus $\Delta\varepsilon_r$ und δ_{max}

1. δ_{max} einzeichnen.
2. Parallele im Abstand $\frac{1}{2}\Delta\varepsilon_r$ zu δ_{max} schneidet ε' im Mittelpunkt.
3. Kreis um Mittelpunkt mit Radius $\frac{1}{2}\Delta\varepsilon_r$ schlagen.

11.3.4 Konstruktion aus δ_{max} und ε' oder ε'' bei $f = \text{const}$

Es sind sowohl δ_{max} , als auch ε' oder ε'' bei einer *einzigsten* Frequenz f bekannt.

1. δ_{max} einzeichnen.
2. ε' oder ε'' einzeichnen. Der Schnittpunkt von δ_{max} mit diesem Wert ist Berührungspunkt.
3. Senkrechte auf δ_{max} im Berührungspunkt einzeichnen. Diese schneidet die ε' -Achse im Mittelpunkt.
4. Kreis um Mittelpunkt durch den Berührungspunkt schlagen.

11.4 Kondensatoren

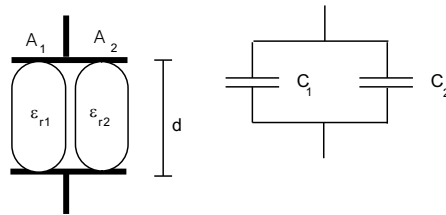
Ladung auf Kondensatorplatte	$Q = CU = DA$
Plattenkondensator	$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d} = \varepsilon_r C_0$
Komplexer Leitwert	$\underline{Y} = j\omega(\varepsilon' - j\varepsilon'') \frac{\varepsilon_0 A}{d} = j\omega(\varepsilon' - j\varepsilon'') C_0 = \underbrace{\omega\varepsilon'' C_0}_{G(\omega)} + j \underbrace{\omega\varepsilon' C_0}_{C(\omega)}$ (D9.1)
Leitwert bei Debeyrelaxation	$\underline{Y} = j\omega \underline{C}(\omega) = j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$ (ε_r aus 11.1)
Sprungantwort von D bei D.-R.	$D = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty E + \varepsilon_0 \Delta\varepsilon_r E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$
Verlustleistung	$P_V = \frac{\hat{U}^2}{2} Y = U_{eff}^2 Y = U_{eff}^2 \omega \varepsilon'' C_0 = U_{eff}^2 \omega \underbrace{\frac{\Delta\varepsilon_r \omega \tau}{1 + (\omega\tau)^2}}_{\varepsilon''} C_0$
für $\omega\tau \ll 1$	$P_V(\omega\tau \ll 1) \approx U_{eff}^2 C_0 \Delta\varepsilon_r \omega^2 \tau$
für $\omega\tau = 1$	$P_V(\omega\tau = 1) = \frac{1}{2} P_V(\omega\tau \gg 1) \approx U_{eff}^2 C_0 \Delta\varepsilon_r \frac{1}{2\tau}$
für $\omega\tau \gg 1$	$P_V(\omega\tau \gg 1) \approx U_{eff}^2 C_0 \Delta\varepsilon_r \frac{1}{\tau} \neq f(\omega)$
Verlustleistungsdichte	$p_V = \frac{P_V}{dA} = U_{eff}^2 \omega \varepsilon'' \frac{\varepsilon_0}{d^2}$
DGL für Polarisation	$P(t) + \tau \dot{P}(t) = \varepsilon_0 \Delta\varepsilon_r E(t) = \varepsilon_0 \Delta\varepsilon_r \frac{U}{d}$
die Lösung	$P(t) = e^{-\int_0^t \frac{1}{\tau} d\tau} \left\{ \underbrace{\int_0^t \frac{\varepsilon_0 \Delta\varepsilon_r E(t')}{\tau} e^{\int_0^{t'} \frac{1}{\tau} d\tau} dt'}_0 + P(0) \right\}$ beim Ausschalten = 0, da $U(t) = 0$
Ausschaltvorgang	$P(t) = \varepsilon_0 \Delta\varepsilon_r \frac{U}{d} e^{-\frac{t}{\tau}}$

Ladestrom $i_{Laden}(t) = i(0)e^{-\frac{t}{\tau}} = AS(t) = A\dot{D}(t) = A\left(\underbrace{\sigma E}_{\text{mit Leitfähigkeit}} + \varepsilon_0 \Delta \varepsilon_r \frac{1}{\tau} E e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

Entladestrom $i_{Entladen}(t) = -A\left(\varepsilon_0 \Delta \varepsilon_r \frac{1}{\tau} E e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

Dielektrizität ohne Relaxation $\varepsilon_\infty = \frac{Q_0(t=0)}{A\varepsilon_0 E}$, da $C(\omega \rightarrow \infty) = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \frac{A}{d}$

11.4.1 Zwei Dielektrika parallel



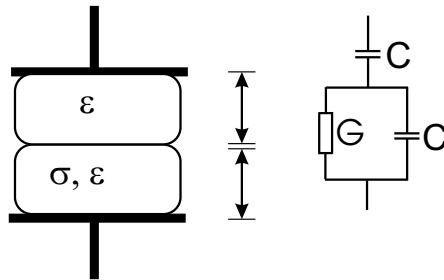
Kapazität $C_{ges} = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} A_1}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} A_2}{d}$

Dielektrische Verschiebung $D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ri} \frac{U}{d}$

Elektrisches Feld $E = \frac{U}{d} = \frac{D_1 + D_2}{\varepsilon_0 (\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})}$

11.4.2 Zwei Dielektrika in Reihe mit Maxwell-Wagner-Relaxation

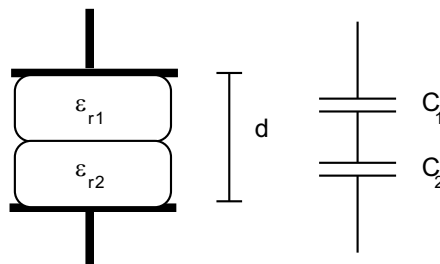
Wenn das zweite Dielektrikum leitend ist ($\sigma \neq 0$), ergibt sich für den zweiten Kondensator eine Parallelschaltung mit einem Leitwert:



Komplexer Leitwert $\underline{Y} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{G + j\omega C_2}} = \frac{j\omega C_1(G + j\omega C_2)}{G + j\omega(C_1 + C_2)}$

Kapazitäten $C_x = \varepsilon_x \frac{A}{d_x}$ mit $\varepsilon_x = \varepsilon_0 \varepsilon_{rx}$

11.4.3 Zwei Dielektrika in Reihe



Kapazität $C_{ges} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

	$C_{ges} = \frac{\epsilon_0 A}{\frac{d_1}{\epsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{r2}}}$
Dielektrische Verschiebung	$D = \frac{C_{ges} U}{A} = \frac{U \epsilon_0}{\frac{d_1}{\epsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{r2}}} = \epsilon_0 \epsilon_{r1} E_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r2} E_2$
Elektrisches Feld	$E = E_1 + E_2 = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} + \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}}$
Spannung	$U = d_1 E_1 + d_2 E_2 = \frac{D}{\epsilon_0} \left(\frac{d_1}{\epsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{r2}} \right)$
Polarisation	$P_i = \epsilon_0 \chi_i E_i = \epsilon_0 (\epsilon_{ri} - 1) E_i = \frac{\epsilon_{ri} - 1}{\epsilon_{ri}} D$

11.5 Polarisation

Arlt: S.121ff

Polarisierbarkeit	α
Verschiebungsdichte	$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad \left[\frac{As}{m^2} \right] \quad \text{mit } \epsilon_r = \chi_e + 1$
Polarisation	$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \vec{D} = \frac{\vec{p}}{V} = n \vec{p} = \sum_i n_i \alpha_i \vec{E}_{loc} \quad \left[\frac{As}{m^2} \right]$
Dipolmoment	$\vec{p} = q d \vec{s} = \alpha \vec{E}_{loc} = \sqrt{\frac{\chi \epsilon_0 k T}{n}}$
lokales Feld	E_{loc} ist das Feld am Ort eines (herausgenommen gedachten) Gitterbausteins innerhalb der Gitterzelle. Es führt, wäre der Baustein eingebaut, zu seiner Polarisation $p = \alpha E_{loc}$. (Arlt S.133f)
Atomkette ($E_i = E_a$)	$E_{loc} = E_i + \frac{P}{2,62 \epsilon_0} = E_a + \frac{P}{2,62 \epsilon_0} \quad (4.36)$
kubische Umgebung	$E_{loc} = E_i + \underbrace{\frac{P}{3 \epsilon_0}}_{\text{Lorentzfeld } E_L}$
Lorenzfeld	$E_L = \frac{P}{3 \epsilon_0}$
Polarisation im Werkstoff	$P = \frac{n \alpha}{1 - \frac{n \alpha}{3 \epsilon_0}} E_a$
Elektrische Suszeptibilität	$\chi_e = \frac{\frac{\epsilon_0}{1 - \frac{n \alpha}{3 \epsilon_0}}}{\epsilon_0}$
Clausius-Mosotti-Gleichung	$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{n \alpha}{3 \epsilon_0} = \underbrace{\frac{\sum_i n_i \alpha_i}{3 \epsilon_0}}_{\text{mehrere Teilchensorten}}$
Dielektrizitätszahl	$\epsilon_r = \frac{1 + \frac{2}{3 \epsilon_0} \sum_i n_i \alpha_i}{1 - \frac{1}{3 \epsilon_0} \sum_i n_i \alpha_i}$
Temperaturkoeffizient	$TK_{\epsilon_r} = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{d \epsilon_r}{dT}$ $TK_{\epsilon_r} = \frac{(\epsilon_r - 1)(\epsilon_r + 2)}{3 \epsilon_r} (TK_n + TK_\alpha)$ $TK_{\epsilon_r} = \frac{(\epsilon_r - 1)(\epsilon_r + 2)}{3 \epsilon_r} (-TK_V + TK_\alpha)$
unpolar $TK_{\epsilon_r} < 0$	unpolare Dielektrika (für Kondensatoren), reine Elektronenpolarisation
unpolar $TK_{\epsilon_r} > 0$	Ionenpolarisation überwiegt

polar $TK_{\varepsilon_r} > 0$	bei konstanter Frequenz
Energie permanenter Dipole	$W_{D,perm} = -\vec{p}\vec{E}$
Energie induzierter Dipole	$W_{D,ind} = -\frac{1}{2}\vec{p}\vec{E}$
Drehmoment auf Dipol	$\vec{T} = \vec{p} \times \vec{E}$
Dipolteilchenzahl	$n = \frac{N_A}{V_{mol}}$
im kubischen Gitter	$n = \frac{1}{a^3}$ mit Gitterkonstante a

Clausius-Mosotti-Gleichung • Atome in kubischer Umgebung

- nur für **induzierte** Dipole
- nur für Ionen- und Elektronenpolarisation
- berücksichtigt das Lorentzfeld

(und Lorentzfeld) • gelten bei $\frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} \approx 1$ näherungsweise auch für Orientierungspolarisation

Orientierungs- und Elektronenpol. • Orientierungspol. $\Rightarrow \varepsilon_{stat}$, Elektronenpol. $\Rightarrow \varepsilon_\infty$

11.5.1 Elektronenpolarisation

Elektronenpolarisation beruht auf **induzierten Dipolen**. Bildlich: Die negative Elektronenhülle wird gegen positiven Atomkern verschoben, so dass sie exzentrisch zu liegen kommt — es bildet sich ein Dipol. Die **Resonanzfrequenz** liegt im **UV-Bereich**.

Polarisierbarkeit	$\alpha_E = 4\pi\varepsilon_0 R^3$
Resonanzkreisfrequenz	$\omega_E^2 = \frac{q^2}{M_E \alpha_E}$
Resonanzfrequenz	$f_E \approx 10^{15} \text{ Hz (Ultraviolett)}$
Temperaturkoeffizient	$TK_{\alpha_E} \cong 0$

11.5.2 Ionenpolarisation

Ionenpolarisation beruht auch auf **induzierten Dipolen**. Sie tritt in Stoffen mit Ionenbindung auf, in denen sich die die positiven gegen die negativen Ionen verschieben. Die **Resonanzfrequenz** liegt im **IR-Bereich**.

Polarisierbarkeit	$\alpha_I = \frac{q^2}{D_r} = \frac{q\Delta\ell}{E}$
Resonanzfrequenz	$f_I \approx 10^{12} - 10^{13} \text{ Hz (Infrarot)}$
Temperaturkoeffizient	$TK_{\alpha_I} \cong 10^{-4} \left[\frac{1}{K} \right]$

11.5.3 Orientierungspolarisation

Orientierungspolarisation beruht auf **permanenten Dipolen**, welche sind ohne äußeres Feld in beliebige Raumrichtungen orientiert – im Mittel jedoch den Stoff unpolar erscheinen lassen. Mit zunehmendem Feld stellen sich immer mehr Dipole in die Feldrichtung; bis zur Sättigung. Können sich diese nur in zwei Richtungen stellen (z.B. $+x$ und $-x$), so spricht man von bidirektionaler Polarisation.

Es tritt keine Resonanz sondern eine **Relaxation** auf, da die Dipole durch Stöße mit ihren Partnern überkritisch gedämpft werden. Ein Stoff mit Debey-Relaxation ist im wesentlichen durch Orientierungspolarisation gekennzeichnet (jeder Stoff hat Elektronenpolarisation!). Die Relaxation findet bei **technischen Frequenzen** statt.

mittlere Polarisierbarkeit	$\langle \alpha_{or} \rangle \cong \frac{p^2}{3kT}$
----------------------------	---

$$\begin{aligned}
&\text{bidirektional} && \langle \alpha_{or} \rangle \cong \frac{p^2}{kT} \\
&\text{durch Debye-Relaxation} && \langle \alpha_{or} \rangle = \frac{3\varepsilon_0 \Delta\varepsilon_r}{n(\varepsilon_\infty + 2)} \quad (4.54) \\
&\text{Statische Suszeptibilität} && \chi_{stat} = \varepsilon_{stat} - 1 = \frac{np^2}{3\varepsilon_0 kT} \\
&\text{Langevin-Funktion} && L(\beta) = \langle \cos \theta \rangle = \coth \beta - \frac{1}{\beta} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{pE}{kT}
\end{aligned}$$

11.5.4 Relaxation

$$\begin{aligned}
&\text{Relaxationsstufe} && \Delta\varepsilon_r = n \langle \alpha_{or} \rangle \frac{\varepsilon_\infty + 2}{3\varepsilon_0} \sim \frac{1}{T} \quad (4.54) \\
& && \text{(beschreibt den maximalen Beitrag der Dipole an der Dielektrizitätszahl)} \\
&\text{(Langevin-Näherung)} && \Delta\varepsilon_r(T) = \Delta\varepsilon_r(T_1) \frac{T_1}{T} \\
&\text{Selbstentladezeitkonstante} && \tau = \frac{1}{\omega_0} = RC = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\sigma} \\
&\text{Temperaturabhängigkeit} && \tau = \tau_0 e^{\frac{W}{kT}} \quad \tau \sim \frac{1}{\Delta\varepsilon_r} \\
&\text{Maxwell-Wagner-Relaxation} && \tau^* = R_2(C_1 + C_2) \quad (4.67)
\end{aligned}$$

11.6 Piezoelektrizität

$$\begin{aligned}
&\text{Piezoelektrische Konstante} && d \quad \left[\frac{As}{N} \right] = \left[\frac{m}{V} \right] \\
&\text{Elastische Konstante} && s^E \quad \left[\frac{m^2}{N} \right] \quad \text{(gemessen bei } E = \text{const)} \\
&\text{Mechanische Spannung} && S_M = s^E T_M + dE \quad \text{mit } T_M = \text{mechanische Spannung} \\
&\text{el. induzierte Verschiebungsdichte} && D = dT_M + \varepsilon_0 \varepsilon_r^T E \quad \text{mit } S_M = \text{mechanische Deformation} \\
& && D = eS + \varepsilon_0 \varepsilon_r^T E \\
& && D = \frac{d}{s^E} S + \varepsilon_0 \varepsilon_r^S E \quad \text{mit } \varepsilon_r^S \text{ bei } S = \text{const} \\
&\text{Schubspannung} && T = c^E S - eE \quad \text{mit } c^E = \frac{1}{s^E} \quad \text{und } e = \frac{d}{\varepsilon_r^T} = \frac{d}{\varepsilon_0 \varepsilon_r^T} \\
& && T = \frac{1}{s^E} S - \frac{d}{\varepsilon_0 \varepsilon_r^T} E \quad \text{mit } \varepsilon_r^T \text{ bei } T = \text{const} \\
& && \varepsilon_r^S = \varepsilon_r^T (1 - k^2) \\
& && s^D = s^E (1 - k^2) \\
& && s^E = \frac{d^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r^T k^2} = \frac{d^2}{\varepsilon_0 (\varepsilon_r^T - \varepsilon_r^S)} \\
&\text{Piezoelektrischer Kopplungsfaktor} && k = \sqrt{\frac{d^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r^T s^E}} = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_r^S}{\varepsilon_r^T}} < 1 \\
& && k^2 = \frac{d^2}{s^E \varepsilon_0 \varepsilon_r^T} \\
& && k^2 = 1 - \frac{\varepsilon_r^S}{\varepsilon_r^T} \\
& && k_{eff}^2 = \frac{C_1}{C_2} = \frac{f_p^2 - f_s^2}{f_p^2} \\
& && C_{NF} = \varepsilon_0 \varepsilon_r^T \frac{A}{d} \\
& && C_{HF} = \varepsilon_0 \varepsilon_r^S \frac{A}{d}
\end{aligned}$$

- Piezo-Messung • 1) Spannungsmessung bewirkt $D = 0 \Rightarrow$ erhalte E
- 2) Ladungsmessung bewirkt $E = 0 \Rightarrow$ erhalte D
 - $D = dT_M + \varepsilon^T E$ (4.81)

